ESSEC
MBA

LES ANNALES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2001 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite S de la suite (S_n). Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S.

PARTIE I

On considère pour tout nombre entier $p \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)dt \quad ; \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)dt.$$

1°) Convergence de la suite (J_p/I_p)

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t).$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}).$$

c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que J_p/I_p tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

2°) Convergence et limite de la suite (S_n)

a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p $(p \geq 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

PARTIE II

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.
On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \text{ pour } k \geq 1.$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1°) Sommation de séries télescopiques

a) Etablir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Etablir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\Sigma(\Delta f)(p)$ avec $p \geq 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad ; \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.

d) Etablir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la série $\Sigma f_k(p)$ et vérifier pour tout nombre entier naturel n que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

2°) Accélération de la convergence de (S_n)

a) Etablir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)!\, f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n') de nombres rationnels telle que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n' \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Expliciter S_n' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant S_n' pour $q = 2$ lorsque n est donné.

PARTIE III

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement limité de S_n suivant les puissances de $1/n$.

1°) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

Etablir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible.

2°) Etude des polynômes de Bernoulli

a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par :

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}x^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

- Préciser U_1, U_2, U_3, U_4.
- Montrer que $U_n' = U_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$.

b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par :

$$V_0 = 1, \quad V_n' = V_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad V_n(0) = V_n(1) \text{ pour } n \geq 2.$$

- Etablir que $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante :

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0)x^p}{p!}.$$

- Etablir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- Etablir enfin que $V_n = U_n$ pour tout nombre entier naturel n.

c) En déduire l'égalité $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel n.
Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

3°) Accélération de la convergence de (S_n)

a) Etablir pour $p \geq 1$ la relation suivante, d'abord en supposant $q = 1$, puis $q \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q} (2k)!u_{2k}\left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) = (2q+2)!\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)dx}{(x+p)^{2q+3}}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \to |U_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0, 1]$.

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n'') de nombres rationnels telle que :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(2q+1)!M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant S_n'' pour $q = 2$ lorsque n est donné.