www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Mercredi 2 Mai 2001 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

LES ANNALES

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite S de la suite (S_n). Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S.

PARTIE I

On considère pour tout nombre entier $p \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)dt \quad ; \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)dt.$$

1°) Convergence de la suite (J_p/I_p)

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t).$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}).$$

c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que J_p/I_p tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

2°) Convergence et limite de la suite (S_n)

a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p $(p \geq 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

PARTIE II

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.

On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k)} \text{ pour } k \geq 1.$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1°) Sommation de séries télescopiques

a) Etablir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Etablir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\Sigma(\Delta f)(p)$ avec $p \geq 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad ; \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p).$$

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.

d) Etablir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la série $\Sigma f_k(p)$ et vérifier pour tout nombre entier naturel n que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}.$$

2°) Accélération de la convergence de (S_n)

a) Etablir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)!\, f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\ldots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\ldots(n+q)}.$$

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n') de nombres rationnels telle que :

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n' \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\ldots(n+q)}.$$

Expliciter S_n' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant S_n' pour $q = 2$ lorsque n est donné.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

LES ANNALES

PARTIE III

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement limité de S_n suivant les puissances de $1/n$.

1°) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 2.$$

Etablir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible.

2°) Etude des polynômes de Bernoulli

a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par :

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p} x^p}{p!} \quad \text{pour tout nombre entier } n \geq 1.$$

- Préciser U_1, U_2, U_3, U_4.
- Montrer que $U_n' = U_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$.

b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par :

$$V_0 = 1, \quad V_n' = V_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad V_n(0) = V_n(1) \text{ pour } n \geq 2.$$

- Etablir que $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante :

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0) x^p}{p!}.$$

- Etablir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0.$$

- Etablir enfin que $V_n = U_n$ pour tout nombre entier naturel n.

c) En déduire l'égalité $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel n.
Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

3°) Accélération de la convergence de (S_n)

a) Etablir pour $p \geq 1$ la relation suivante, d'abord en supposant $q = 1$, puis $q \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q} (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)dx}{(x+p)^{2q+3}}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \to |U_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0, 1]$.

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n'') de nombres rationnels telle que :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}.$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Ecrire en PASCAL un algorithme calculant et affichant S_n'' pour $q = 2$ lorsque n est donné.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021