



**ESSEC**  
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option scientifique

MATHEMATIQUES II

Vendredi 4 Mai 2001 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord de façon générale (partie I), puis dans un cas particulier (partie II).

**PARTIE I**

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances  $E(X)$  et  $E(Y)$  et des variances  $V(X)$  et  $V(Y)$  et on suppose  $V(X) > 0$  (on rappelle que  $V(X) = 0$  si et seulement si, avec une probabilité égale à 1,  $X$  est constante). La covariance des deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1°) Covariance des variables aléatoires  $X$  et  $Y$

a) Exprimer  $\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$  en fonction de  $V(\lambda X + Y)$  et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel  $\lambda$  :

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que  $(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$ .

A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité  $(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$  ?

2°) Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires  $X$  et  $Y$

On suppose dans cette question les variances  $V(X)$  et  $V(Y)$  de  $X$  et  $Y$  strictement positives.

- a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire  $\rho$  des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  en fonction de  $\text{Cov}(X, Y)$  et des écarts-types  $\sigma(X)$  et  $\sigma(Y)$  des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  et montrer que  $\rho$  appartient à  $[-1, +1]$ .

Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante  $\rho$  est égal à  $-1$  ou  $+1$ .

- b) Donner la valeur de  $\rho$  lorsque les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- c) On suppose enfin que  $X$  suit une loi normale centrée réduite  $N(0, 1)$  et que  $Y = X^2$ . Préciser les espérances et les variances de  $X$  et  $Y$  ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$ . Etudier alors la réciproque de la question 2°(b).

**PARTIE II**

1°) Calculs préliminaires

- a) On considère deux nombres entiers naturels  $q$  et  $n$  tels que  $n \geq q$ .  
En raisonnant par récurrence sur  $n$ , établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^n C_k^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

- b) En faisant  $q = 1, 2, 3$ , en déduire une expression factorisée des trois sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k \quad ; \quad \sum_{k=2}^n k(k-1) \quad ; \quad \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie deux nombres entiers  $p$  et  $n$  tels que  $1 \leq p \leq n$  et une urne contenant  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ .

On extrait de cette urne simultanément et au hasard  $p$  jetons et on désigne alors par :

- $X$  la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des  $p$  jetons tirés.
- $Y$  la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des  $p$  jetons tirés.

On note  $E(X)$ ,  $V(X)$  et  $E(Y)$ ,  $V(Y)$  les espérances et variances des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

**A]** Dans cette partie A, on suppose que  $p = 2$  (autrement dit, on extrait deux jetons de l'urne et  $X$  et  $Y$  sont les variables aléatoires indiquant le plus petit et le plus grand des 2 numéros tirés).

**A.2°) Lois des variables aléatoires  $X$  et  $Y$**

- a) Quel est le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble à  $j$  éléments ? à  $n$  éléments ?  
En déduire les probabilités  $P(Y \leq j)$  et  $P(Y = j)$  pour  $2 \leq j \leq n$ , puis, en raisonnant de même, les probabilités  $P(X \geq i)$  et  $P(X = i)$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ .  
(On vérifiera que les formules donnant  $P(Y = j)$  et  $P(X = i)$  restent valables si  $j = 1$  ou  $i = n$ ).
- b) Comparer les lois des variables aléatoires  $n+1-X$  et  $Y$ , autrement dit les deux probabilités  $P(n+1-X = j)$  et  $P(Y = j)$  pour  $2 \leq j \leq n$ .  
En déduire que  $E(n+1-X) = E(Y)$  et  $V(n+1-X) = V(Y)$ , puis en déduire les expressions de  $E(X)$  en fonction de  $E(Y)$  et de  $V(X)$  en fonction de  $V(Y)$ .

**A.3°) Espérances et variances des variables aléatoires  $X$  et  $Y$**

- a) Exprimer les espérances  $E(Y)$  et  $E(X)$  en fonction de  $n$ .
- b) Exprimer sous forme factorisée  $E[(Y(Y-2))]$ , puis  $E(Y^2)$ ,  $V(Y)$  et  $V(X)$  en fonction de  $n$ .

**A.4°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires  $X$  et  $Y$**

a) Montrer que la probabilité  $P(X = i \cap Y = j)$  est égale à  $\frac{2}{n(n-1)}$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ .

b) En déduire sous forme factorisée l'espérance  $E[X(Y-2)]$  et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$ .

*On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$  est indépendant de  $n$ .*

**B] Dans cette partie B, on revient au cas général et le nombre entier  $p$  vérifie donc  $1 \leq p \leq n$ .**

**B.5°) Lois des variables aléatoires  $X$  et  $Y$**

a) Déterminer  $P(Y \leq j)$  et  $P(Y = j)$  pour  $p \leq j \leq n$ ,  $P(X \geq i)$  et  $P(X = i)$  pour  $1 \leq i \leq n-p+1$

b) Comparer les lois de  $n+1-X$  et  $Y$  et en déduire les expressions de  $E(X)$  en fonction de  $E(Y)$  et de  $V(X)$  en fonction de  $V(Y)$ .

**B.6°) Espérances et variances des variables aléatoires  $X$  et  $Y$**

a) Vérifier l'égalité  $jC_{j-1}^{p-1} = pC_j^p$  et en déduire les espérances  $E(Y)$  et  $E(X)$  en fonction de  $n$ .

b) Vérifier l'égalité  $(j+1)jC_{j-1}^{p-1} = (p+1)pC_{j+1}^p$  et en déduire sous forme factorisée  $E[(Y+1)Y]$ , puis  $E(Y^2)$ ,  $V(Y)$  et  $V(X)$  en fonction de  $n$ .

**B.7°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires  $X$  et  $Y$**

a) Expliciter la probabilité  $P(X = i \cap Y = j)$  pour  $p \leq j \leq n$  et  $1 \leq i \leq j-p+1$ .

b) En déduire sous forme factorisée l'espérance  $E[(Y+1)(Y-X)]$  et montrer que :

$$E(XY) = \frac{(n+1)[(p+1)n+p]}{(p+2)(p+1)}.$$

c) En déduire sous forme factorisée la covariance et le coefficient de corrélation de  $X$  et  $Y$ .

*On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$  est indépendant de  $n$ .*

**C] Dans cette partie C, on suppose à nouveau  $p = 2$  et on se propose de retrouver les résultats du II.A par une autre méthode, en ne supposant connues que les probabilités  $P(X = i \cap Y = j)$ .**

**C.8°) Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires  $X$  et  $Y$**

On désigne par  $G$  la fonction génératrice du couple de variables aléatoires  $(X, Y)$ , définie par :

$$G(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X = i \cap Y = j)(1+u)^i(1+v)^j.$$

a) Montrer que  $\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = E(X)$  et  $\frac{\partial G}{\partial v}(0,0) = E(Y)$ .

Donner des égalités analogues pour  $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0)$ ,  $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0)$  et  $\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0,0)$ .

b) Montrer, en posant  $w = u + v + uv$ , c'est à dire  $1+w = (1+u)(1+v)$ , qu'on a pour  $u, v, w \neq 0$  :

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \left[ \frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v} \right].$$

En développant ci-dessus  $(1+w)^n$  et  $(1+v)^n$ , quelle expression de  $G(u, v)$  en déduit-on?

c) Préciser les deux dérivées partielles  $\partial w / \partial u$  et  $\partial w / \partial v$  et retrouver  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $E(X^2)$  et  $V(X)$ ,  $E(Y^2)$  et  $V(Y)$ ,  $E(XY)$  et  $\text{Cov}(X, Y)$ , et enfin le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$ .