ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 30 Avril 2002, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(Y = k) = (k \leq X < k+1)$.

1) a. Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

b. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.

c. En déduire que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

d. Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.

2) On pose $Z = X - Y$.

a. Déterminer $Z(\Omega)$.

b. En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \ P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

c. En déduire une densité f de Z.

d. Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 2

On désigne par n un entier naturel non nul.

On lance n fois une pièce de monnaie donnant "*pile*" avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et "*face*" avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k-chaîne de "*pile*" une suite de k lancers consécutifs ayant tous donné "*pile*", cette suite devant être suivie d'un "*face*" ou être la dernière suite du tirage.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de "*pile*" obtenues au cours de ces n lancers.

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement « on obtient "*pile*" au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1 P_2 F_3 F_4 P_5 P_6 P_7 F_8 P_9 F_{10} P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

1) Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.

2) Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$ et donner $E(Y_{n-1})$.

3) Dans cette question, k désigne un entier de $[\![1, n-2]\!]$.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de "*pile*" commence au $i^{\text{ème}}$ lancer et qui vaut 0 sinon.

a. Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.

b. Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2 p^k$.

c. Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.

d. Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$ puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} \forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{-x \ln x}{1 + x^2} \\ f(0) = 0. \end{cases}$

1) a. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudier le signe de $f(x)$.

2) Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt .$$

3) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose : $g(x) = F(x) - x$.

a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme

$$g'(x) = \frac{-x\, h(x)}{1 + x^2}.$$

b. Étudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq -0{,}48$).

c. En déduire le signe de $g(x)$.

4) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

a. Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$.

b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant $M = aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d décrivent $\mathbb{R}$.

1) a. Montrer que E est un espace vectoriel.
   b. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
   c. Donner la dimension de E.

2) a. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et K^3 appartiennent à E.
   b. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
   c. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

3) a. Montrer que L est diagonalisable.
   b. Déterminer les valeurs propres de L ainsi que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4) On considère les vecteurs : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   b. Vérifier que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des vecteurs propres de L et de $J + K$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant elles le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

1) a. Écrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = i \ / \ X_n = j)$.
   b. Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L.

2) a. Pour tout i de $\{1, 2, 3, 4\}$, calculer $A\,u_i$. En déduire qu'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = P\,D\,P^{-1}$. Expliciter D et P.

b. Calculer P^2 puis en déduire P^{-1}.

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

a. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = A\,C_n$.

b. En déduire que $C_n = \dfrac{1}{4} P D^n P C_0$, puis donner la loi de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.