EMLYON Graduate School of Management

# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

# MATHEMATIQUES

## 1ère épreuve (option économique)

*Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures*

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## EXERCICE 1

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.*

**1. a.** Calculer $K^2$.

**b.** En déduire que la matrice $K$ est inversible et déterminer $K^{-1}$.

**c.** Montrer que la matrice $K$ n'admet aucune valeur propre réelle.

**2.** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. On note $M$ la matrice définie par $M = aI + bK$.

**a.** Montrer : $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.

**b.** En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice $M$ est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de $I$ et $M$.

**c.** *Application :* donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$


Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021
E.M.LYON est affiliée à la Chambre de Commerce et de l'Industrie de Lyon.

**3.** On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice $K$ relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$ :

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

**a.** Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

**b.** Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ en fonction de $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ et en déduire la matrice $K'$ associée à $f$ relativement à la base $\mathcal{C}$.

**c.** Déterminer la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

**d.** Rappeler l'expression de $K'$ en fonction de $K$, $P$ et $P^{-1}$.

# EXERCICE 2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0\,;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

## *I. Étude des fonctions polynomiales $P_n$*

**1.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$ :

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}, \text{ où } P_n' \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

**2.** Étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de $P_n$ sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de $P_n$.

**3.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $P_n(1) < 0$.

**4. a.** Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$ :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\Big(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\Big).$$

**b.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $P_n(2) \geqslant 0$.

**5.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée $x_n$, et que :

$$1 < x_n \leqslant 2.$$

**6.** Écrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de $x_2$ à $10^{-3}$ près.



Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

## II. *Limite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

**1.** Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$ :

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

**2.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,\mathrm{d}t.$$

**3.** Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1\,;+\infty[$ :

$$t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1).$$

**4.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{2}(x_n-1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

**5.** Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

# EXERCICE 3

## 1. *Étude préliminaire*

On admet, pour tout entier naturel $k$ et pour tout réel $x$ de $[0\,;1[$, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant k} C_n^k x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n$.

**a.** Vérifier, pour tout réel $x$ de $[0\,;1[$ :

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

**b.** Pour tout couple d'entiers naturels $(n,k)$ tel que $k<n$, montrer :

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

**c.** Pour tout entier naturel $k$ et pour tout réel $x$ de $[0\,;1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

**d.** Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0\,;1[,\quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,.$$

Fichier généré pour Visiteur () le 31/05/2021

## 2. *Étude d'une expérience aléatoire*

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire $N$ égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si $N$ prend une valeur entière positive non nulle notée $n$, on réalise alors une seconde série de $n$ tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire $X$ égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

**a.** Déterminer la loi de la variable aléatoire $N$. Donner son espérance.

**b.** Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(X = k \,/\, N = n)$.

**c.** Vérifier : $\mathrm{P}(X = 0) = \dfrac{4}{9}$.

**d.** En utilisant l'étude préliminaire, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

**e.** Montrer que $X$ admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et calculer $\mathrm{E}(X)$.

**f.** Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X \leqslant k) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.

## 3. *Étude d'une variable aléatoire à densité*

On note $a = -\dfrac{\ln 9 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 4}$ et on définit la fonction $F$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \dfrac{5}{9}\left(\dfrac{4}{9}\right)^x & \text{si } x \in [a\,;+\infty[ \\ F(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\dfrac{4}{9}\right)^x = \mathrm{e}^{x \ln \frac{4}{9}}$.

**a.** Montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, notée $Y$.

**b.** Déterminer une densité $f$ de $Y$.

**c.** Déterminer une primitive de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x \ln \frac{4}{9}}$.

**d.** Montrer que $Y$ admet une espérance $\mathrm{E}(Y)$ et calculer $\mathrm{E}(Y)$.

- FIN -

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021