OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 13 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On appelle *durée de vie* d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle *loi de survie* du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad D(t) = 1 - F(t)$$

Le problème se compose de deux parties pouvant être traitées indépendamment.

Partie 1 : Cas discret

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $D(n) \neq 0$.

A. Coefficient d'avarie

Le composant est mis en service à l'instant 0. Pour tout entier naturel n non nul, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant n du composant, la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n, sachant qu'il fonctionne encore à l'instant $n-1$, c'est-à-dire le nombre π_n défini par l'égalité :

$$\pi_n = \mathbf{P}([T = n]/[T > n-1])$$

1) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la probabilité $\mathbf{P}([T = n])$ à l'aide de la fonction D.
En déduire l'égalité :
$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}$$

2) On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p.
   a) Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?
   b) Calculer, pour tout entier naturel n, $D(n)$ en fonction de n.
   c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\pi_n = p$.

3) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel strictement positif α tel que l'on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = \alpha$.
   a) Établir, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $D(n) = (1-\alpha).\ D(n-1)$.
   b) En déduire que T suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

B. Nombre de pannes successives dans le cas d'une loi géométrique

Un premier composant est mis en service à l'instant 0 et, quand il tombe en panne, est remplacé instantanément par un composant identique qui sera remplacé à son tour à l'instant de sa première panne dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

On suppose à nouveau, dans cette partie, que p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p et que, pour tout entier strictement positif i, la durée de vie du i-ème composant est une variable aléatoire T_i définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$, de même loi que T.

Les variables aléatoires T_i sont supposées mutuellement indépendantes et, pour tout entier naturel k non nul, on pose : $\quad S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} T_i$.

(S_k désigne donc l'instant où se produit la k-ième panne et le k-ième remplacement.)

1) Soit m un entier naturel. Démontrer par récurrence sur n, pour tout entier naturel n vérifiant $n \geqslant m$, l'égalité : $\quad \displaystyle\sum_{j=m}^{n} C_j^m = C_{n+1}^{m+1}$.

2) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire S_2 égale à $T_1 + T_2$.

   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul k, la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geqslant k, \quad \mathbf{P}([S_k = n]) = C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

3) On dispose en PASCAL de la fonction «RANDOM» qui retourne un nombre de type «REAL» choisi au hasard dans l'intervalle $[0,1[$. Ainsi, si p est la probabilité de panne du composant à un instant donné, en faisant appel à la fonction «RANDOM», on obtient une simulation informatique de cette panne dans le cas où le nombre retourné par cette fonction est strictement inférieur à p.

   a) Écrire une fonction PASCAL d'en-tête

   «FUNCTION NbP(p :REAL ; n :INTEGER) : INTEGER ;»

   qui, connaissant le nombre réel p et un nombre entier strictement positif n, simule l'expérience et retourne le nombre de pannes survenues jusqu'à l'instant n.

   b) Écrire une procédure PASCAL d'en-tête

   «PROCEDURE Arret(p :REAL ; r :INTEGER) ;»

   qui, connaissant le nombre réel p et un nombre entier strictement positif r, simule l'expérience en l'arrêtant dès que le nombre de pannes atteint le nombre r et affiche la valeur de l'instant n où l'arrêt s'est produit.

4) Soit n un entier strictement positif. On note U_n la variable aléatoire désignant le nombre de pannes (et donc de remplacements) survenues jusqu'à l'instant n inclus.

   a) Établir l'égalité $\mathbf{P}([U_n = 0]) = (1-p)^n$ et calculer $\mathbf{P}([U_n = n])$.

   b) Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, l'événement $[U_n \geqslant k]$ à l'aide d'un événement faisant intervenir la variable aléatoire S_k.

   c) En déduire que U_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

5) Dans cette question, le nombre p est égal à $\frac{1}{200}$.

   On considère alors un appareillage électronique utilisant simultanément 1000 composants identiques fonctionnant indépendamment les uns des autres et dont la durée de vie suit la même loi que T. À chaque instant, les composants en panne sont remplacés par des composants identiques comme précédemment.

   a) Préciser la loi de la variable aléatoire U désignant le nombre total de remplacements de composants effectués jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus.

   b) On désire qu'avec une probabilité de 0,95, le stock de composants de rechange soit suffisant jusqu'à l'instant n égal à 100 inclus. À combien peut-on évaluer ce stock ?

   On donne : $\sqrt{\frac{995}{2}} \simeq 22,3$ et, en désignant par Φ la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite, $\Phi(1,65) \simeq 0,95$.

Partie 2 : Cas continu

On suppose dans cette partie que T est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

A. Loi de survie et coefficient d'avarie

Pour tout réel t positif, on appelle *coefficient d'avarie* à l'instant t le nombre $\pi(t)$ défini par :

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}$$

1) Soit t un réel positif.
Pour tout réel strictement positif h, on note $q(t,h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t, c'est-à-dire le nombre $q(t,h)$ défini par :

$$q(t,h) = \mathbf{P}([T \in]t, t+h]/[T > t])$$

   a) Établir pour tout réel h strictement positif, l'égalité : $\quad q(t,h) = \dfrac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$.

   b) Montrer que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et préciser sa fonction dérivée.

   c) Montrer que le rapport $\dfrac{q(t,h)}{h}$ a pour limite $\pi(t)$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures.

2) On suppose, dans cette question, que λ est un réel strictement positif et que T suit la loi exponentielle de paramètre λ.

   a) Déterminer alors la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.

   b) Établir, pour tout réel t positif, l'égalité $\pi(t) = \dfrac{1}{\mathrm{E}(T)}$, où $\mathrm{E}(T)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire T.

3) On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

   a) Vérifier que la fonction f ainsi définie possède les propriétés d'une densité de probabilité.

   b) Justifier les égalités :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$$

   c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.

   d) Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.
   En déduire la variance de la variable aléatoire T.

   e) Déterminer la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et le point d'inflexion. *On donne :* $\quad e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,607$.

   f) Calculer, pour tout réel t positif, le coefficient d'avarie $\pi(t)$.

4) On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on ait : $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \pi(t) = \alpha$.

   a) Pour tout réel t positif, on pose : $g(t) = e^{\alpha t} D(t)$. Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+$.

   b) En déduire que T suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.

B. Entretien préventif

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.

On suppose que la variable aléatoire T admet une espérance (nécessairement strictement positive) notée $\mathrm{E}(T)$ et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût C, et que son remplacement a un coût K, C et K étant deux constantes strictement positives.

Une première méthode d'entretien consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par : $c_1 = \dfrac{K+C}{\mathrm{E}(T)}$.

Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel θ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à θ, sinon à le remplacer préventivement au bout d'une durée θ de fonctionnement.

On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de θ par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - D(\theta))C}{\displaystyle\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t}$$

1) À l'aide d'une intégration par parties, établir la formule :

$$\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}([T > \theta]).\theta + \mathbf{P}([T \leqslant \theta]).\int_0^\theta t\,\frac{f(t)}{F(\theta)}\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^\theta D(t)\,\mathrm{d}t$ peut donc s'interpréter comme la durée moyenne de fonctionnement du composant dans la deuxième méthode.

2) Calculer c_1 et, pour tout réel θ strictement positif, $c_2(\theta)$ dans le cas où T suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

3) On suppose que T suit la loi décrite dans la question **A.3** de la **Partie 2**.

   a) Préciser la valeur de c_1 et montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{\theta \to +\infty} c_2(\theta) = c_1$.

   b) Pour tout réel strictement positif θ, on pose : $\varphi(\theta) = C\displaystyle\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\theta}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right)$.
   Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est strictement positive.
   En déduire le tableau de variations de φ.

   c) Étudier les variations de la fonction c_2 et montrer qu'elle admet un minimum en θ_0 qui vérifie : $c_2(\theta_0) < c_1$.

   d) Établir l'égalité $c_2(\theta_0) = C\theta_0$ puis l'inégalité $\theta_0 < \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(1 + \dfrac{K}{C}\right)$.

   e) On suppose, dans cette question, que K et C sont tous deux égaux à 1, et on donne : $c_2(1,5) = 1,5429$ et $c_2(1,45) = 1,5439$.
   En déduire un encadrement de θ_0 d'amplitude 0,1.