CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. – E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mardi 14 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

On désigne par I, O, J et A les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. a) Écrire la matrice A comme combinaison linéaire des matrices I et J, puis la matrice J comme combinaison linéaire des matrices A et I.

b) Exprimer J^2 en fonction de J et en déduire que la matrice A vérifie l'égalité $A^2 + 5A + 4I = O$.

c) Montrer que la matrice A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction des matrices I et J.

2. a) Soit U la matrice-colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel JU.

En déduire une valeur propre de la matrice J.

b) Montrer que 0 est valeur propre de J et donner une base du sous-espace propre associé.

c) La matrice J est-elle inversible ? La matrice J est-elle diagonalisable ?

3. a) Soit X une matrice-colonne non nulle à trois éléments et λ un réel vérifiant $JX = \lambda X$. Montrer qu'il existe un réel μ que l'on donnera en fonction de λ vérifiant $AX = \mu X$.

b) En déduire que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont -1 et -4.

c) Sans expliciter la matrice A^{-1}, calculer ses valeurs propres et montrer qu'elle est diagonalisable.

4. Soit a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ a \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera, en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de F_a sont nulles. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.

c) Calculer, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre : $G_a(x,y) = F_a(x,y) + \dfrac{1}{3}(3x - y - a)^2 + 2a^2$ et préciser son signe.

d) En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur notée $M(a)$.

e) Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. Que peut-on en conclure ?

PROBLÈME

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie 1 : Exemples

1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.

b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

c) pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

2. Programmation

Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0, w_1, \ldots, w_n$.

3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.
La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, elle aussi, vers 0.

d) Soit b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $b * v$ est convergente et de limite nulle.

Partie 2 : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et a ?

c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$. Montrer que la suite $b * \varepsilon$ converge vers 0.

d) On désigne par d la suite $b * \varepsilon$.

Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie 3 : Application aux variables aléatoires

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires envisagées sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Résultats préliminaires

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on désigne par S leur somme.

a) Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \mathbf{P}([X = n])$ et $v_n = \mathbf{P}([Y = n])$.
Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S = n]) = w_n$, ($w$ étant la suite définie à partir des suites u et v en tête du problème).

b) Retrouver alors le résultat de la question **1.**c) de la **Partie 1** par un choix adéquat des lois de X et de Y.

c) Pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note 2^{-Z} la variable aléatoire prenant, pour tout entier naturel n, la valeur 2^{-n} si et seulement si l'événement $[Z = n]$ est réalisé. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance donnée par :

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}([Z = n])\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y} ?
En déduire l'égalité : $r(S) = r(X)\,r(Y)$.

e) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par : $\displaystyle S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i$. Établir l'égalité : $r(S_q) = (r(X_1))^q$.

2. Une formule sommatoire

a) Montrer que les égalités : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([Z = n]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

b) On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable :

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i$$

En admettant, pour tout entier naturel non nul q, l'égalité $\sum_{k=0}^{n} C_{k+q}^{q} = C_{n+q+1}^{q+1}$, montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([S_q = n]) = C_{n+q-1}^{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q}$$

c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+q-1}^{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{q}$$

3. Un exemple concret

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie à la question **2.**a) représente le nombre de petits devant naître en 2003 d'un couple de kangourous. Chaque petit kangourou a la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres. On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2003.

a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.

b) À l'aide de la formule obtenue en **2.**c, montrer que la loi de F est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}([F = n]) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

c) Justifier l'existence des espérances $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{E}(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité : $\mathrm{E}(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.