ecricome

banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles
escbordeaux/escmarseille/icnnancy/escreims/escrouen/esctoulouse

J. 1697

CONCOURS D'ADMISSION 2002

option scientifique

MATHÉMATIQUES

mercredi 22 mai 2002 de 8 h 00 à 12 h 00

durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

1. EXERCICE.

E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Id_E l'identité de E, Θ l'endomorphisme nul.
$\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
Pour tout n, $\mathbb{C}_n[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à l'entier n.
Si g est un endomorphisme de E, on définit g^n par :

$$\begin{cases} g^0 = Id_E \\ g^n = g^{n-1} \circ g \ , \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_pX^p$, on note $P(g)$ l'endomorphisme de E égal à :

$$P(g) = a_0Id_E + a_1g + \ldots + a_pg^p$$

On rappelle que pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{C}[X]$ on a :

$$(PQ)(g) = P(g) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(g)$$

Puissance d'un endomorphisme.

On désigne par T le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$T(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

et par f un endomorphisme de E satisfaisant à la relation :

$$T(f) = \Theta$$

1. Montrer que 1 est la seule racine réelle de T. Soient α et $\overline{\alpha}$ les deux autres racines non réelles et conjuguées. Calculer $\alpha + \overline{\alpha}$ et $\alpha\overline{\alpha}$.

2. On désigne par φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de P par T.

   a. Rappeler le théorème de la division des polynômes suivant les puissances décroissantes.

   b. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

   c. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Est-il surjectif ?

3. On note L_1, L_2, L_3, les polynômes définis par :

$$L_1(X) = (X-1)(X-\alpha), L_2(X) = (X-1)(X-\overline{\alpha})$$

$$L_3(X) = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$$

   a. Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique triplet (a_n, b_n, c_n) appartenant à $\mathbb{C}^3$ tel que :

$$\varphi(X^n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$$

et exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de $\alpha, \overline{\alpha}, n$. Vérifier que $c_n = \frac{1}{2}$.

c. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f).$$

d. Justifier la convergence des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ vers des réels respectifs a, b, c.

4. On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$.

a. Montrer que $h = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + Id_E)$.

b. Prouver enfin que h est un projecteur.

2. EXERCICE.

On se propose ici d'étudier la série de terme général :

$$u_n(x) = a_n x^n$$

où x est un réel quelconque et a_n un réel défini par :

$$a_n = \int_0^1 \left[\frac{1+t^2}{2}\right]^n dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

2.1. Etude de l'absolue convergence de la série.

1. Prouver que pour tout n entier naturel :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{n+1}$$

2. Pour $|x| = 1$, la série de terme général $u_n(x)$ est-elle absolument convergente ?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante, sur x, pour que la série de terme général $u_n(x)$ soit absolument convergente.

2.2. Somme de la série pour $-1 \leqslant x < 1$.

On suppose maintenant, $-1 \leqslant x < 1$.

1. Pour $t \in [0, 1]$, montrer que :

$$2 - x - xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1 - x)$$

2. Justifier l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2dt}{2 - x - xt^2}$

Tournez la page S.V.P.

3. On pose
$$f(x) = \int_0^1 \frac{2dt}{2 - x - xt^2}$$
Montrer que pour tous les entiers naturels n :
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \right| \leqslant \frac{8\,|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}$$

4. En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $u_n(x)$.

5. Donner la valeur de a_0, puis établir la relation de récurrence suivante :
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (2k+3)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k.$$

6. Ecrire en PASCAL un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-p} près, le réel x et l'entier p étant supposés donnés.

3. PROBLEME.

Deux biens C_1 et C_2 indéfiniment divisibles sont disponibles sur le marché.
On appelle "panier de biens" tout couple (x, y) de nombres réels appartenant à l'ensemble D suivant :
$$D = \{(x, y) \text{ tels que } 0 \leqslant x, \quad 0 \leqslant y \leqslant 5, \quad 2x + 3y \leqslant 19\}$$
x, y désignent respectivement les quantités du bien C_1 et du bien C_2 qui peuvent être physiquement consommés par un agent économique.
Sur le marché, le prix unitaire de chacun de ces deux biens est égal à 1.
On considère un consommateur ayant un revenu égal à 8.
Les paniers de biens accessibles budgétairement par ce consommateur appartiennent donc à l'ensemble B des couples (x, y) de D tels que $x + y \leqslant 8$.
Les préférences de ce consommateur sur B, sont définies de la façon suivante :

(x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') si et seulement si $(y-3)\exp(x+2) \geqslant (y'-3)\exp(x'+2)$

L'application u définie sur B par :
$$u(x, y) = (y - 3)\exp(x + 2), \text{ pour } (x, y) \in B$$
s'appelle la fonction d'utilité du consommateur.

3.1. Propriétés de la relation de préférence.

1. Justifier les propositions suivantes :

   a. (x, y) est préféré ou indifférent à (x, y).
   b. Si (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') et si (x', y') est préféré ou indifférent à (x'', y'') alors (x, y) est préféré ou indifférent à (x'', y'').
   c. (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') ou (x', y') est préféré ou indifférent à (x, y).

3.2. Courbes d'indifférence.

1. Représenter graphiquement l'ensemble B dans un repère orthonormé (unités 1 cm sur chacun des axes) et déterminer les coordonnées des cinq sommets du polygone constituant le bord de B.

2. Dans ce qui suit, pour m réel, on désigne par A_m l'ensemble défini par :

$$A_m = \{(x, y) \in B \text{ tel que } u(x, y) = m\}$$

   a. Déterminer la fonction numérique f_m telle que, pour m fixé on ait, pour tout élément (x, y) de A_m , $y = f_m(x)$.

   b. Etudier et représenter dans le même repère que celui de la question 3.2.1, la fonction $y = f_m(x)$ pour $m = -8$, $m = 0$, $m = 8$.
   ($e^{-2} \approx 0.14, e^{-3} \approx 0.05, e^{-4} \approx 0.02, e^{-5} \approx 0.007, e^{-6} \approx 0.002, e^{-7} \approx 0.001$)

   c. Déterminer m_0 pour que la courbe représentative de $y = f_{m_0}(x)$ soit tangente à la droite (T) d'équation :

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{19}{3}$$

   Représenter $y = f_{m_0}(x)$ sur le graphique.
   ($e^3 \approx 20.09, e^2 \approx 7.39, e \approx 2.72$).

3.3. Recherche d'un élément maximal sur B pour la relation de préférence.

1. On admet que B est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il est borné.

2. Justifier l'existence d'un couple (x_0, y_0) de B préféré ou indifférent à tous les couples (x, y) de B.

3. On note $\overset{\circ}{B}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ des couples solutions du système :

$$\begin{cases} 0 < x \\ 0 < y < 5 \\ 2x + 3y < 19 \\ x + y < 8 \end{cases}$$

   Montrer que u n'admet pas d'extremum local sur $\overset{\circ}{B}$.

4. On étudie dans cette question le maximum de la fonction u sur B, sous la contrainte

$$2x + 3y = 19$$

   a. Montrer que ce problème se ramène à déterminer le maximum de la fonction g de la variable réelle, définie sur $[2, 5]$ par :

$$g(x) = \frac{10 - 2x}{3} \exp(x + 2)$$

   b. Déterminer ce maximum après avoir justifié son existence.

Tournez la page S.V.P.

5. Etudier de même la recherche du maximum de la fonction u sur B, sous chacune des quatre autres contraintes :

$$x + y = 8, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 5$$

6. Déduire de ce qui précède la valeur du couple (x_0, y_0).

3.4. Etude de deux tests d'arrêt.

On considère l'épreuve qui consiste à effectuer une série de sondages sur un ensemble de consommateurs du bien C_1.
Toute personne interrogée se voit attribuer un numéro.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, le numéro X_i affecté au $i^{ème}$ consommateur interrogé est une variable aléatoire.
Les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

On définit deux tests qui conditionnent l'arrêt de l'enquête :
- Test I : le sondage s'arrête dès que le numéro d'un consommateur est supérieur ou égal au numéro du consommateur précédemment interrogé.
- Test II : le sondage s'arrête dès que la somme des numéros des consommateurs est supérieure strictement à l'entier N , avec N supérieur ou égal à 2.

Enfin, on note T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de personnes interrogées, l'enquête ayant été interrompue par le Test I (respectivement le Test II).

3.4.1. Partie 1

On suppose que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ suivent la même loi, une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$.
Par convention : $C_n^j = 0$ pour $j > n$.

Etude d'un cas particulier.

1. Pour cette question seulement, $N = 3$.

   a. Donner la loi des variables T_1 et T_2.

   b. Calculer leur espérance et leur variance.

Etude de la loi de T_1.

1. Quel est l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_1 ?

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, la probabilité de l'événement $\{T_1 > n\}$ est donnée par :

$$p\{T_1 > n\} = \frac{C_N^n}{N^n}$$

   En déduire la loi de T_1.

3. Montrer que l'espérance de T_1 est donnée par :

$$E(T_1) = (1 + \frac{1}{N})^N$$

4. De même, prouver que :

$$E(T_1^2 - T_1) = 2(1 + \frac{1}{N})^{N-1}$$

En déduire la variance $V(T_1)$ de T_1 en fonction de N.

5. Donner les limites de $E(T_1)$ et $V(T_1)$ lorsque N tend vers l'infini .

Etude de la loi de T_2.

1. Montrer que, pour tous entiers naturels r, n :

$$\sum_{k=0}^{r} C_k^n = C_{r+1}^{n+1}$$

2. Quel est l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable T_2 ?

3. Par récurrence sur l'entier n inférieur ou égal à N, prouver que :

$$\forall\ j\ \in \{1, 2, \ldots N\} \qquad p\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leqslant j\} = \frac{C_j^n}{N^n}$$

4. En déduire la loi de T_2.

5. Quelle est votre conclusion ?

3.4.2. Partie 2

On suppose que les variables $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires absolument continues qui suivent une loi uniforme sur le segment $[1, N]$.

1. Montrer que la densité de probabilité f_n d'une somme de n variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur le segment $[0, 1]$, est donnée sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

2. Prouver que si la variable X suit une loi uniforme sur le segment $[1, N]$, alors la variable Y, définie par $X = 1 + (N-1)Y$, suit une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.

3. En déduire la loi de T_2.