



E.S.C.P. – E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mardi 14 Mai 2002, de 8 h. à 12 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une fonction réelle  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$ , et on note  $I(f)$  l'intégrale :  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on pose :

$$M_k(f) = \sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(k)}(x)|, \text{ où } f^{(k)} \text{ désigne la dérivée d'ordre } k \text{ de } f.$$

Les polynômes considérés sont à coefficients réels, et on confond polynôme et fonction polynomiale associée. Pour tout entier naturel  $m$ , on note  $\mathbb{R}_m[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $m$ .

On rappelle que si  $r_1, r_2, \dots, r_p$  sont des racines réelles distinctes d'un polynôme  $P$ , avec des multiplicités respectives  $k_1, k_2, \dots, k_p$ , alors il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P = Q \prod_{i=1}^p (X - r_i)^{k_i}$ .

Enfin,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  désignent  $n$  réels deux à deux distincts de  $[-1, 1]$ , et on note  $A_n$  le polynôme :

$$A_n = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$$

L'objet de ce problème est l'approximation de  $I(f)$  par des intégrales de fonctions polynomiales.

### Préliminaire

- 1) Énoncer le théorème de Rolle.
- 2) Soit  $g$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $[-1, 1]$ , s'annulant en  $n + 1$  points distincts de  $[-1, 1]$ .
  - a) Montrer que la dérivée de  $g$  s'annule en au moins  $n$  points distincts de  $]-1, 1[$ .
  - b) Montrer qu'il existe un réel  $c$  de  $]-1, 1[$  tel que  $g^{(n)}(c) = 0$ .

## Partie I

Dans cette partie, on va proposer comme valeur approchée de  $I(f)$  la valeur de l'intégrale obtenue en remplaçant la fonction  $f$  par la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ , introduite ci-dessous, qui coïncide avec  $f$  sur chacun des points  $a_i$ .

Pour tout entier  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $L_i$  le polynôme :  $L_i = \prod_{\substack{k \in \{1, 2, \dots, n\} \\ k \neq i}} (X - a_k)$ .

Par exemple, si  $n = 3$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 0$ , et  $a_3 = 1$ , alors :  $L_1 = X(X-1)$ ,  $L_2 = (X-1)(X+1)$ ,  $L_3 = X(X+1)$ .

- 1) a) Vérifier que, pour tous entiers  $i$  et  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , le réel  $L_i(a_j)$  est nul lorsque  $i$  est différent de  $j$ , et est non nul lorsque  $i$  est égal à  $j$ .
- b) Montrer qu'il existe un **unique** polynôme, que l'on note  $P_f$ , de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ , tel que, pour tout entier  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a l'égalité  $P_f(a_j) = f(a_j)$ , et que ce polynôme est donné par la formule :

$$P_f = \sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$$

- 2) Pour tout entier  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on pose :  $\delta_i = \frac{1}{L_i(a_i)} \int_{-1}^1 L_i(x) dx$ .

$$\text{Montrer que : } \int_{-1}^1 P_f(x) dx = \sum_{i=1}^n \delta_i f(a_i).$$

$$\text{Dans toute la suite, on note : } J_n(f) = \int_{-1}^1 P_f(x) dx = \sum_{i=1}^n \delta_i f(a_i).$$

- 3) Que peut-on dire de  $I(f)$  et  $J_n(f)$  lorsque  $f$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  ?
- 4) Soit  $x$  un élément fixé de  $[-1, 1]$ , distinct de chacun des réels  $a_i$ .
  - a) Justifier l'existence d'un réel  $\lambda$  vérifiant l'égalité :  $f(x) - P_f(x) - \lambda A_n(x) = 0$ .  
On note maintenant  $g_\lambda$  l'application qui à tout réel  $t$  de  $[-1, 1]$  associe :

$$g_\lambda(t) = f(t) - P_f(t) - \lambda A_n(t)$$

- b) Calculer  $g_\lambda(a_i)$  pour chaque entier  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- c) Montrer qu'il existe un réel  $c$  de  $] -1, 1[$  tel que  $g_\lambda^{(n)}(c) = 0$ , puis établir l'égalité :

$$\lambda = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

- 5) En déduire que, pour tout réel  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $|f(x) - P_f(x)| \leq \frac{M_n(f)}{n!} |A_n(x)|$   
puis établir l'inégalité :

$$|I(f) - J_n(f)| \leq \frac{M_n(f)}{n!} \int_{-1}^1 |A_n(x)| dx$$

### 6) Étude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose que  $a_1 = -1$ ,  $a_n = 1$  et que  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont répartis régulièrement, c'est-à-dire que, pour tout entier  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a :  $a_i = -1 + \frac{2(i-1)}{n-1}$ .

- a) Soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq n - 1$  et soit  $x$  un réel de  $[a_k, a_{k+1}]$ . Justifier l'inégalité :

$$|A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^n k!(n-k)!$$

- b) En déduire que, pour tout réel  $x$  de  $[-1, 1]$ , on a :  $|A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$ .

- c) **On admet** que, quand l'entier naturel  $p$  tend vers l'infini, on a l'équivalence suivante :  $p! \sim \left(\frac{p}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}$ .  
Montrer que, si l'entier  $n$  est assez grand, on a, pour tout réel  $x$  de  $[-1, 1]$ , la majoration :

$$|A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

## Partie II

Dans cette partie, on va proposer comme valeur approchée de  $I(f)$  la valeur de l'intégrale obtenue en remplaçant la fonction  $f$  par une certaine fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$ , qui réalise une approximation de  $f$  plus fine que la fonction polynomiale de la partie précédente.

Pour tout polynôme  $Q$ , on note  $Q'$  le polynôme dérivé de  $Q$ .

1) On considère l'application  $T$  de  $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  définie par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], T(Q) = (Q(a_1), Q(a_2), \dots, Q(a_n), Q'(a_1), Q'(a_2), \dots, Q'(a_n))$$

- Montrer que  $T$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .
- Montrer que  $T$  est injective (on rappelle qu'un réel  $a$  est racine au moins double d'un polynôme  $Q$  si et seulement si  $Q(a) = Q'(a) = 0$ ). En déduire que  $T$  est bijective.
- Utiliser la question précédente pour montrer qu'il existe un unique polynôme, noté  $Q_f$ , de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$ , tel que, pour tout entier  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  :

$$Q_f(a_j) = f(a_j) \text{ et } Q'_f(a_j) = f'(a_j)$$

(on ne demande pas d'explicitier  $Q_f$ )

Dans toute la suite, on note :  $K_n(f) = \int_{-1}^1 Q_f(x) dx$ .

- Que peut-on dire de  $I(f)$  et  $K_n(f)$  lorsque  $f$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$  ?
- Par une méthode analogue à celle de la partie précédente, on pourrait démontrer, et **on admettra**, la majoration :

$$|I(f) - K_n(f)| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^1 A_n^2(x) dx$$

Que vaut le polynôme  $Q_f$  lorsque  $f$  est la fonction polynomiale  $x \mapsto A_n^2(x)$  ?  
Montrer que, dans ce cas, l'inégalité précédente est une égalité.

4) Soit  $\Phi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \Phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$$

Montrer que  $\Phi$  est un produit scalaire.

- L'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  est maintenant muni de ce produit scalaire.
  - Justifier l'existence d'un polynôme  $V$  de degré au plus  $n - 1$  vérifiant :  $Q_f - P_f = A_n V$ .  
En déduire que si le polynôme  $A_n$  est orthogonal à tout polynôme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , alors  $K_n(f) = J_n(f)$ .
  - Inversement, si le polynôme  $A_n$  n'est pas orthogonal à tout polynôme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , montrer qu'il existe une fonction  $f$  telle que  $K_n(f) \neq J_n(f)$ .

## Partie III

Dans cette partie, l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  est toujours muni du produit scalaire  $\Phi$  introduit dans II.4).

On note  $R_n$  l'image du polynôme  $X^n$  par la projection orthogonale sur le sous espace-vectoriel  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , et on pose :  $S_n = X^n - R_n$ . Ainsi,  $S_n$  est orthogonal à tout polynôme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $X^n = R_n + S_n$ .

1) En se plaçant dans le cas particulier où  $n = 3$ , déterminer  $S_3$ .

2) On revient désormais au cas général.

a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $S_n$ .

b) Justifier l'égalité :  $\int_{-1}^1 S_n(x) dx = 0$ .

En déduire que le polynôme  $S_n$  admet au moins une racine dans  $] -1, 1[$ .

3) On se propose de montrer que  $S_n$  admet exactement  $n$  racines réelles distinctes dans l'intervalle  $] -1, 1[$ .

a) On suppose qu'il existe un réel  $\alpha$  et un polynôme  $Q$  tels que  $S_n = (X - \alpha)^2 Q$ .

Aboutir à une contradiction en considérant le signe de  $S_n Q$  et la valeur de  $\Phi(S_n, Q)$ .

En déduire que toutes les racines réelles de  $S_n$  sont simples.

b) Soit  $p$  le nombre de racines distinctes de  $S_n$  qui appartiennent à  $] -1, 1[$ , et soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  ces racines.

On définit le polynôme :

$$U = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)$$

Montrer que le polynôme  $S_n U$  est de signe constant sur  $[-1, 1]$ , et en déduire, en considérant  $\Phi(S_n, U)$ , que  $p$  n'est pas inférieur ou égal à  $n - 1$ .

Conclure que  $S_n$  admet exactement  $n$  racines réelles distinctes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  dans  $] -1, 1[$ , et que :

$$S_n = \prod_{j=1}^n (X - \alpha_j)$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , et on conserve toutes les notations précédentes. En particulier, on a maintenant  $A_n = S_n$ , et, avec les réels  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  introduits dans

la partie I, (et qui sont indépendants de  $f$ ), on note toujours  $J_n(f) = \int_{-1}^1 P_f(x) dx = \sum_{i=1}^n \delta_i f(\alpha_i)$ .

4) En utilisant les résultats de la partie II, montrer que :

$$|I(f) - J_n(f)| \leq \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^1 S_n^2(x) dx$$

5) En se plaçant à nouveau dans le cas particulier où  $n = 3$ , montrer que :

$$J_3(f) = \frac{1}{9} \left( 5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right)$$

6) Étude des réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$

a) En considérant  $J_n(f)$  lorsque  $f$  est constante égale à 1, donner la valeur de  $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$ .

b) Pour chaque entier  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , montrer, en considérant la valeur de  $J_n(f)$  lorsque  $f$  est la fonction polynomiale  $x \mapsto L_j^2(x)$ , que  $\delta_j$  est positif.

c) On suppose dans cette question que les racines de  $S_n$  sont numérotées par ordre croissant, c'est-à-dire :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$$

Justifier que  $S_n(-X) = (-1)^n S_n(X)$ .

En déduire que les réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont répartis symétriquement par rapport à 0, autrement dit que pour tout entier  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a l'égalité :  $\alpha_{n+1-i} = -\alpha_i$ .

En conclure que, pour tout entier  $j$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on a l'égalité :  $\delta_{n+1-j} = \delta_j$ .

7) Majoration de  $\int_{-1}^1 S_n^2(x) dx$

a) Montrer que pour tout polynôme  $P$  de degré  $n$  et de coefficient dominant 1, on a l'inégalité :

$$\int_{-1}^1 S_n^2(x) dx \leq \int_{-1}^1 P^2(x) dx$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $k$ , il existe un polynôme  $T_k$  de degré  $k$  et de coefficient dominant 1 tel que, pour tout réel  $\theta$  :  $\cos(k\theta) = 2^{k-1} T_k(\cos \theta)$ .

En déduire la majoration :

$$\int_{-1}^1 S_n^2(x) dx \leq \frac{\pi}{2^{2n-2}}$$