CONCOURS D'ADMISSION DE 2002

Option scientifique

MATHEMATIQUES I

Jeudi 2 Mai 2002 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans la suite, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire lorsque son coefficient dominant (c'est à dire le coefficient de son terme de plus haut degré) est égal à 1.

L'objet du problème est l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables (partie II). A cet effet, on étudie auparavant, dans la partie I, une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et leurs racines. Les deux parties ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre des résultats de la partie I pour pouvoir traiter la partie II.

PARTIE I

1°) Définition d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$

a) Etablir que l'application associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ le polynôme $\phi(P) = 2xP' - P''$ (où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Ecrire sa matrice dans la base canonique $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

ESSEC BUSINESS SCHOOL
AVENUE BERNARD HIRSCH - B.P. 105
95021 CERGY PONTOISE CEDEX FRANCE
TEL.: 33 (0)1 34 43 30 00
FAX : 33 (0)1 34 43 31 11
WEB: WWW.ESSEC.FR
ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR LIBRE
RECONNU PAR L'ETAT. MEMBRE DE LA FESIC

ESSEC ACTING FIRST
agir en pionnier
ESSEC BUSINESS SCHOOL
ETABLISSEMENTS PRIVES D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR.
ASSOCIATION LOI 1901.
ACCREDITES AACSB - THE INTERNATIONAL ASSOCIATION
FOR MANAGEMENT EDUCATION
AFFILIES A LA CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE
DE VERSAILLES VAL D'OISE-YVELINES

2°) Eléments propres de l'endomorphisme ϕ

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ de ϕ (on supposera que $\lambda_0 \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$) et montrer que ϕ est diagonalisable.

b) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \le p \le n$, qu'il existe un et un seul polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$H_p'' - 2xH_p' + 2pH_p = 0.$$

c) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \le p \le n$, que H_p est nécessairement de degré p.

d) Expliciter les polynômes H_0, H_1, H_2, H_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer les coefficients de x^{p-1} $(1 \le p \le n)$ et de x^{p-2} $(2 \le p \le n)$ dans l'expression du polynôme H_p.

3°) Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

a) Montrer que l'intégrale écrite ci-dessous est définie pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$< P , Q > = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\exp(-x^2)dx.$$

b) Montrer alors que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to <P , Q> \in \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Exprimer la dérivée de $x \to P'(x).\exp(-x^2)$ en fonction de $\phi(P)(x).\exp(-x^2)$, puis prouver qu'on a pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$<\phi(P) , Q> = <P , \phi(Q)>.$$

d) En déduire que $<H_p , H_q> = 0$ lorsque p et q sont deux nombres entiers distincts compris entre 0 et n, puis que $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ forme une base orthogonale pour ce produit scalaire. Montrer enfin que $<H_p , Q> = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ $(1 \le p \le n)$.

4°) Etude des racines des polynômes H_p $(1 \le p \le n)$

a) Montrer, en remarquant que $<H_p , H_0> = 0$, que le polynôme H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

b) On note $a_1, a_2, \dots, a_m$ les racines distinctes de H_p en lesquelles celui-ci s'annule et change de signe (avec bien entendu $m \le p$) et on pose alors $P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$.
Etudier le signe du polynôme H_pP_m et déterminer la valeur de l'intégrale $<H_p, P_m>$ si $m < p$, puis en déduire que $m = p$.

c) En déduire que le polynôme H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

5°) Relations entre les polynômes H_p $(2 \le p \le n)$

a) Prouver les égalités suivantes pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-3}[X]$ où $3 \le p \le n$:

$$<xH_{p-1} , Q> = 0 \quad ; \quad <H_p - xH_{p-1} , Q> = 0.$$

En exprimant le polynôme $H_p - xH_{p-1}$ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$, établir la relation :

$$2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0 \quad (\text{pour } 2 \le p \le n).$$

b) Prouver l'égalité $<H_p' , Q> = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-2}[X]$ où $2 \le p \le n$, puis en déduire la relation :

$$H_p' = pH_{p-1} \quad (\text{pour } 1 \le p \le n).$$

PARTIE II

On considère dans cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ constitué des n-uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ constitué des n-uplets $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (mais on ne demande pas de vérifier que cette partie U de $\mathbb{R}^n$ est ouverte).

On étudie ici les extrema de la fonction de plusieurs variables F définie sur l'ouvert U par :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \ln(x_j - x_i).$$

Par exemple, pour $n = 3$, on obtient : $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\ln(x_2 - x_1) - 2\ln(x_3 - x_2) - 2\ln(x_3 - x_1)$.

1°) Etude du cas particulier $n = 2$ ($F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2\ln(x_2 - x_1)$)

a) Calculer les deux dérivées partielles de F en tout point $x = (x_1, x_2)$ de U et déterminer l'unique point a de U où ces dérivées partielles sont nulles.

b) Calculer $F(a)$ et montrer que F présente un minimum local en a.

2°) Etude du point critique de F dans le cas général

On associe à tout point a de U le polynôme $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$. On rappelle qu'un point a de U est dit point critique de F si les dérivées partielles de F sont nulles en a.

a) Etablir la relation suivante pour tout nombre réel x distinct de $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - a_j}.$$

En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$.

b) Déterminer à l'aide de la formule de Taylor-Young (dont on demande de rappeler ici l'énoncé) le développement limité à l'ordre 2 à l'origine des deux fonctions suivantes :

$$f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t) \quad ; \quad g(t) = tP(a_i + t).$$

En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i}$ (on posera $x = a_i + t$).

c) Utiliser les résultats précédents pour établir l'égalité :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$$

Exprimer les n dérivées partielles de F en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$, puis démontrer que si a est point critique de F, alors $2xP' - P''$ admet pour racines $a_1, a_2, \dots, a_n$.

d) En déduire qu'il existe un nombre réel λ (dont on précisera la valeur) tel que $2xP' - P'' = \lambda P$, puis comparer les polynômes P et H_n. Etablir que F admet un unique point critique a dans U.

3°) Nature du point critique de F dans le cas général

a) Montrer, si x, y appartiennent à U, que $tx + (1-t)y$ appartient aussi à U si $0 \leq t \leq 1$.

b) On dit qu'une fonction f définie sur l'ouvert U est convexe si :

$$\forall x, y \in U, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

- Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
  En déduire que $x \to x_i^2$ est convexe sur U.
- Montrer que la fonction $x \in]0, +\infty[\to -\ln(x) \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
  En déduire que $x \to -\ln(x_j - x_i)$ est convexe sur U.
- Etablir que F est convexe sur U.

c) On désigne par a le point critique de F et par x un élément de U et on pose pour $0 \leq t \leq 1$:

$$\psi(t) = F(tx + (1-t)a).$$

- Calculer la dérivée $\psi'(t)$ et montrer que $\psi'(0) = 0$.
- Etablir l'inégalité ci-dessous pour $0 < t \leq 1$, puis conclure que F admet un minimum en a :

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \leq F(x) - F(a).$$

4°) Calcul du minimum $F(a)$ de F dans le cas général

a) On désigne par $y_1, \dots, y_{n-1}$ les racines de H_{n-1} et par $z_1, \dots, z_{n-2}$ les racines de H_{n-2} ($n \geq 3$).

- Etablir à l'aide de la relation $2H_n - 2xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0$, les relations :

$$\left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} \left|\prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(z_i)\right| \quad ; \quad \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \frac{2^2 3^3 \dots (n-1)^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

- Etablir que $|H_n'(a_i)| = \left|\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_j - a_i)\right|$ et évaluer $p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ en fonction de $\prod_{i=1}^{n} H_n'(a_i)$.

- Etablir à l'aide de la relation $H'_n = nH_{n-1}$ l'égalité $p_n^2 = n^n \left| \prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i) \right|$.
- En déduire p_n en fonction de n.

b) En remarquant que le polynôme H_n vérifie l'égalité suivante :

$$H_n(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ \ldots\ (x-a_n) = x^n - \sum_{1 \le i \le n} a_i x^{n-1} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j x^{n-2} - \ \ldots\ + (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n,$$

calculer les sommes $\sum_{1 \le i \le n} a_i$, $\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j$, puis $\sum_{1 \le i \le n} a_i^2$.

En déduire la valeur $F(a)$ du minimum de F sur U et retrouver lorsque $n = 2$ le résultat du II.1°.