Quelques pépites extraites du nombre d'or.

– On pose $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le *nombre d'or*) et $\widehat{\Phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On observera que Φ et $\widehat{\Phi}$ sont les solutions de $x^2 = x+1$, et que $\widehat{\Phi} = -\dfrac{1}{\Phi}$.

– Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x.

Première partie

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$ (où 1 apparaît n fois).
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et que sa limite est égale à Φ. [S]

2. On pose $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ pour $n \geq 1$.
En s'aidant de la suite de terme général $w_n = \dfrac{v_n - \Phi}{v_n - \widehat{\Phi}}$, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \Phi$. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie les relations entre le nombre d'or et la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$.
On rappelle que celle-ci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Dans cette question, on établit une expression de F_n en fonction Φ^n et de $\widehat{\Phi}^n$.
   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n)$. [S]
   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, F_n est l'entier le plus proche de $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$. [S]

2. En utilisant Φ, on trouve ici des relations de récurrence d'ordre 1 entre les F_n.
   (a) Montrer que pour n de $\mathbb{N}$, on a $F_{n+1} = \Phi F_n + \widehat{\Phi}^n$. [S]
   (b) Inversement, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on $\Phi^{n+1} = \Phi F_{n+1} + F_n$. [S]
   (c) Prouver que pour tout $n \geq 1$, $F_{2n} = [\,\Phi\, F_{2n-1}\,]$ et $F_{2n+1} = [\,\Phi\, F_{2n}\,] + 1$. [S]
   (d) Déduire de $(2a)$ que $F_{n+1} = [\,\Phi F_n - \widehat{\Phi}\,]$ pour tout $n \geq 2$. [S]
   (e) Montrer que la suite de terme général $u_n = F_n + 1$ vérifie : $\forall\, n \geq 2,\ u_{n+1} = [\,\Phi u_n]$. [S]

3. Dans cette question, on pose $q_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, pour tout $n \geq 1$.
   (a) Montrer que la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ converge vers Φ. [S]
   (b) Pour tout entier $n \geq 1$, prouver qu'on a l'égalité $q_{n+1} - q_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$. [S]
   (c) Établir que les suites $(q_{2n})_{n\geq 1}$ et $(q_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes. [S]
   (d) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}$. [S]
   (e) En revenant aux notations de (I.2), montrer que $q_n = v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Troisième partie

Pour tout réel $x > 1$, on note $E_1(x) = \{[nx], n \in \mathbb{N}^*\}$ et $E_2(x) = \{[nx^2], n \in \mathbb{N}^*\}$.
On remarque que $E_1(x)$ et $E_2(x)$ sont deux parties de $\mathbb{N}^*$. Plus précisément l'hypothèse $x > 1$ implique que $([nx])_{n\geq 1}$ et $([nx^2])_{n\geq 1}$ sont deux suites strictement croissantes de $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question, on va montrer que $E_1(\Phi)$ et $E_2(\Phi)$ sont deux ensembles disjoints.
   Par l'absurde, on suppose qu'il existe m, n dans $\mathbb{N}^*$ tels que $[m\Phi] = [n\Phi^2]$.
   (a) On pose $p = [m\Phi] = [n\Phi^2]$. Montrer que $p = [n\Phi] + n$. [S]
   (b) Montrer que l'entier m est égal à $[n\Phi]$ ou bien à $[n\Phi] + 1$. [S]
   (c) On suppose $m = [n\Phi]$. Montrer $m < (p - m)\Phi$. En déduire une contradiction. [S]
   (d) On suppose $m = [n\Phi] + 1$. Montrer que $m > (p - m + 1)\Phi$.
   En déduire une contradiction et conclure. [S]

2. Dans cette question, on va prouver que la réunion de $E_1(\Phi)$ et de $E_2(\Phi)$ est égale à $\mathbb{N}^*$.
   Il en résultera que les ensembles $E_1(\Phi)$ et de $E_2(\Phi)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   Pour tout $m \geq 2$, on note $J_m = \{1, 2, 3, 4, \ldots, F_m\}$ et $\begin{cases} E_1^m(\Phi) = \{[k\,\Phi], k \in J_{2m-1}\} \\ E_2^m(\Phi) = \{[k\,\Phi^2], k \in J_{2m-2}\} \end{cases}$
   (a) Préciser le cardinal de $E_1^m(\Phi)$ et de $E_2^m(\Phi)$. [S]
   (b) En utilisant (II 2 c) montrer que $E_1^m(\Phi)$ et $E_2^m(\Phi)$ sont des parties de J_{2m}. [S]
   (c) Montrer finalement que $E_1^m(\Phi)$ et $E_2^m(\Phi)$ forment une partition de J_{2m}. [S]
   (d) Conclure. [S]

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe deux réels a, b, avec $1 < a < b$, tels que :
   – $E_1(a)$ et $E_2(a)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   – $E_1(b)$ et $E_2(b)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   On va constater que cette hypothèse conduit à une contradiction. Il en résultera que Φ est le seul réel $x > 1$ tel que $E_1(x)$ et $E_2(x)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $[na] \leq [nb]$ et $[na^2] \leq [nb^2]$ [S]
   (b) Justifier l'existence d'un entier $p \geq 1$ minimum pour lequel $[pa] < [pb]$.
   Justifier l'existence d'un entier $q \geq 1$ minimum pour lequel $[qa^2] < [qb^2]$. [S]
   (c) On suppose qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $[pa] = [nb]$.
   Montrer que $n < p$ puis en déduire une contradiction.
   En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $[pa] = [rb^2]$. [S]
   (d) Avec les notations précédentes, montrer $r \geq q$ et en déduire $[pa] > [qa^2]$. [S]
   (e) En s'inspirant des deux questions précédentes, montrer $\exists\, s \in \mathbb{N}^*$, $[qa^2] = [sb]$.
   Prouver que $s \geq p$ et en déduire $[qa^2] > [pa]$. [S]
   (f) Conclure cette partie du problème.
   A titre d'exemple, répartir les entiers de 1 à 30 entre $E_1(\Phi)$ et $E_2(\Phi)$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Quatrième partie : le jeu de Whytoff

On rappelle que les ensembles $\begin{cases} E_1(\Phi) = \{\,[n\Phi\,],\, n \in \mathbb{N}^*\} \\ E_2(\Phi) = \{\,[n\Phi^2\,],\, n \in \mathbb{N}^*\} \end{cases}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Pour simplifier les notations, on pourra poser $a_n = [\,n\Phi\,]$ et $b_n = [\,n\Phi^2\,]$ pour $n \geq 1$.

On rappelle que l'égalité $\Phi^2 = \Phi + 1$ implique $b_n = [\,n(\Phi+1)\,] = [\,n\Phi\,] + n = a_n + n$.

Le jeu décrit ici était connu en Chine sous le nom de tsyan-shidzi (*le choix des pierres*). Il a été réinventé par le mathématicien néerlandais Willem Abraham Wythoff (1865-1939) qui en publia une analyse complète en 1907.

Deux joueurs font face à deux piles de pièces de hauteurs inégales. A son tour, chaque joueur retire un nombre quelconque de pièces (au moins une). Il peut choisir de retirer ces pièces dans une seule colonne ou dans les deux. Mais dans ce dernier cas, il doit retirer le même nombre de pièces dans les deux colonnes.

Le joueur qui retire la dernière pièce gagne la partie (on comprend pourquoi les deux colonnes doivent au départ être de hauteurs inégales !)

On dira que les deux piles sont *configurées* si elles contiennent respectivement a_n pièces (pour la pile la moins haute) et b_n pièces (pour la pile la plus haute.) pour un certain entier $n \geq 1$. On étend cette définition en posant $a_0 = b_0 = 0$ (dans ce cas les deux piles sont vides : le joueur qui atteint cette configuation a donc gagné.)

1. Dans cette question suppose que les colonnes sont configurées (et non vides.)
   Montrer qu'au tour suivant elles ne sont plus configurées. [S]
2. Dans cette question on suppose que les colonnes ne sont pas configurées.
   Montrer qu'on peut jouer de telle sorte qu'au tour suivant elles le soient. [S]
3. Déduire de ces résultats une stratégie pour ce jeu. Cette stratégie sera gagnante pour le premier ou pour le second joueur, selon l'état initial des deux piles de pièces. [S]
4. Au départ, les piles contiennent 17 et 28 pièces. Grand prince, votre adversaire vous donne le choix : soit vous commencez, soit il commence. Que faites-vous ? [S]
5. Le jeu suivant a été inventé vers 1960 par Rufus P.Isaacs, un mathématicien de l'université Johns Hopkins (Baltimore, Maryland.)
   Ce jeu pourrait s'appeler « *coince la reine dans un coin* ».

   Deux joueurs déplacent à tour de rôle une reine sur un échiquier (virtuellement infini vers la droite et vers le haut) à partir d'une position initiale.

   La reine ne peut se déplacer que vers le bas, vers la gauche, ou en diagonale dans la direction *sud-ouest*.

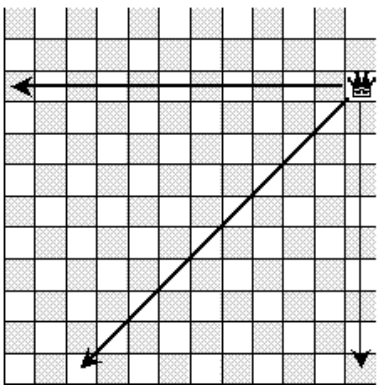
   Chaque joueur déplace à son tour la reine, d'au moins une case, et dans l'une des trois directions possibles.

   Est déclaré vainqueur le joueur qui amène la reine sur la case située en bas et à gauche de l'échiquier.

   Ci-contre, voici une situation initiale.

   Vous avez le choix de commencer à jouer ou de laisser jouer votre adversaire en premier. Que faites-vous ?

   [S]



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé du problème

Première partie

1. On a $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ (pour $n \geq 0$ en posant $u_0 = 0$) et on en déduit :

   $|u_{n+1} - \Phi| = |\sqrt{1+u_n} - \Phi| = \dfrac{|1+u_n-\Phi^2|}{\sqrt{1+u_n}+\Phi} = \dfrac{|u_n-\Phi|}{\sqrt{1+u_n}+\Phi} \leq \dfrac{1}{1+\Phi}|u_n-\Phi|$

   Une récurrence évidente donne $|u_n - \Phi| \leq \dfrac{1}{\Phi^{2n}}|u_0-\Phi|$ donc $|u_n-\Phi| \leq \dfrac{1}{\Phi^{2n-1}}$

   Puisque $\Phi > 1$, il en découle $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n-\Phi| = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \Phi$. [Q]

2. v_n est défini pour tout $n \geq 1$ et est dans $\mathbb{R}^{+*}$. On peut donc poser $w_n = \dfrac{v_n-\Phi}{v_n-\widehat{\Phi}}$.

   Avec $\Phi = 1+1/\Phi$ et $\widehat{\Phi} = 1+1/\widehat{\Phi}$, on trouve :

   $$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}-\Phi}{v_{n+1}-\widehat{\Phi}} = \frac{1+\dfrac{1}{v_n}-\Phi}{1+\dfrac{1}{v_n}-\widehat{\Phi}} = \frac{\dfrac{1}{v_n}-\dfrac{1}{\Phi}}{\dfrac{1}{v_n}-\dfrac{1}{\widehat{\Phi}}} = \frac{\widehat{\Phi}}{\Phi}\,\frac{v_n-\Phi}{v_n-\widehat{\Phi}} = \frac{\widehat{\Phi}}{\Phi}\,w_n$$

   La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{\widehat{\Phi}}{\Phi} = -\widehat{\Phi}^2 \in]-1,0[$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$.

   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $v_n = \dfrac{\Phi - w_n\widehat{\Phi}}{1-w_n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$, il vient $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \Phi$. [Q]

Deuxième partie

1. (a) Posons $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. On a $x_0 = 0 = F_0$ et $x_1 = 1 = F_1$.

   On se donne $n \geq 2$ tel que $F_{n+1} = x_{n+1}$ et $F_n = x_n$.

   $$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\widehat{\Phi}^n(\Phi+1) - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\widehat{\Phi}^n(\widehat{\Phi}+1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+2} - \widehat{\Phi}^{n+2}) = x_{n+2} \end{aligned}$$

   Cette récurrence montre donc que $F_n = x_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. [Q]

   (b) Il suffit de montrer que la distance entre F_n et $\dfrac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$ est strictement inférieure à $\dfrac{1}{2}$.

   Or $|\widehat{\Phi}| < 1 \Rightarrow \left|F_n - \dfrac{\Phi^n}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}|\widehat{\Phi}|^n < \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$, ce qui établit le résultat.

   Remarque : pour tout entier naturel n, on peut donc écrire : $F_n = \left[\dfrac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}\right]$. [Q]

2. (a) On utilise la résultat de la question (II 1 a). Pour tout entier $n \geq 0$:

   $$\Phi F_n + \widehat{\Phi}^n = \frac{\Phi}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n) + \widehat{\Phi}^n = \frac{\Phi(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n)}{\Phi - \widehat{\Phi}} + \widehat{\Phi}^n = \frac{\Phi^{n+1} - \widehat{\Phi}^{n+1}}{\Phi - \widehat{\Phi}} = F_{n+1}.$$ [Q]

   (b) L'égalité est vraie si $n = 0$ car $\Phi F_1 + F_0 = \Phi$.

   Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Supposons que l'égalité soit vraie au rang $n-1$. Alors

   $$\begin{aligned} \Phi^{n+1} &= \Phi\,\Phi^n = \Phi\,(\Phi F_n + F_{n-1}) = \Phi^2 F_n + \Phi F_{n-1} \\ &= (\Phi+1)F_n + \Phi F_{n-1} = \Phi(F_n + F_{n-1}) + F_n = \Phi F_{n+1} + F_n \end{aligned}$$

   La propriété est donc vraie au rang n, ce qui achève la récurrence. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

(c) Pour tout $n \geq 1$, on a $\Phi F_{2n-1} = F_{2n} - \widehat{\Phi}^{2n-1}$ et $\Phi F_{2n} = F_{2n+1} - \widehat{\Phi}^{2n}$.
Puisque $-1 < \widehat{\Phi} < 0$, on a $0 < -\widehat{\Phi}^{2n-1} < 1$ donc $[\Phi F_{2n-1}] = F_{2n}$.
Pour les mêmes raisons, on a $0 < \widehat{\Phi}^{2n} < 1$ donc $[\Phi F_{2n}] = F_{2n+1} - 1$. [Q]

(d) Les F_n étant des entiers, il s'agit de prouver $F_{n+1} \leq \Phi F_n - \widehat{\Phi} < F_{n+1} + 1$.
D'après $(2a)$, cela équivaut à prouver $\widehat{\Phi}^n \leq -\widehat{\Phi} < \widehat{\Phi}^n + 1$.
On sait que $-1 < \widehat{\Phi} < 0$. Il en découle $\widehat{\Phi}^k > -1$ pour tout $k \geq 0$.
On en déduit $\widehat{\Phi}^n + \widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}(\widehat{\Phi}^{n-1} + 1) < 0$ pour $n \geq 1$.
De même $\widehat{\Phi}^n + \widehat{\Phi} + 1 = \widehat{\Phi}^n + \widehat{\Phi}^2 = \widehat{\Phi}^2(\widehat{\Phi}^{n-2} + 1) > 0$ pour $n \geq 2$.
Conclusion : pour tout entier $n \geq 2$, on a $F_{n+1} = [\Phi F_n - \widehat{\Phi}]$. [Q]

(e) Pour tout $n \geq 2$, et en utilisant l'égalité $1 - \widehat{\Phi} = \Phi$:
$u_{n+1} = F_{n+1} + 1 = [\Phi F_n - \widehat{\Phi}] + 1 = [\Phi F_n - \widehat{\Phi} + 1] = [\Phi(F_n + 1)] = [\Phi u_n]$ [Q]

3. (a) D'après $(3a)$, $q_n = \Phi + \dfrac{\widehat{\Phi}^n}{F_n}$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{\Phi}^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \Phi$. [Q]

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a $q_{n+1} - q_n = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2}{F_n F_{n+1}}$
Posons $v_n = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2$. On va donc montrer $v_n = (-1)^{n-1}$, pour tout $n \geq 0$.
La propriété est vraie si $n = 0$ car $v_0 = F_0 F_2 - F_1^2 = -1$. Pour tout $n \geq 0$:
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}^2 = F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) - (F_{n+1} + F_n)F_{n+2} \\ &= F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = -v_n \end{aligned}$$
La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de raison -1, et $v_0 = -1$.
On en déduit $v_n = (-1)^{n+1}$ puis : $\forall\, n \geq 1,\ q_{n+1} - q_n = \dfrac{v_n}{F_n F_{n+1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{F_n F_{n+1}}$ [Q]

(c) Pour tout $n \geq 1$: $q_{n+2} - q_n = (q_{n+2} - q_{n+1}) + (q_{n+1} - q_n)$.
D'après $(4b)$: $q_{n+2} - q_n = \dfrac{(-1)^n}{F_{n+1}F_{n+2}} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{F_n F_{n+1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}(F_{n+2} - F_n)}{F_n F_{n+1} F_{n+2}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{F_n F_{n+2}}$.
En particulier $q_{2n+2} - q_{2n} = \dfrac{-1}{F_{2n}F_{2n+2}} < 0$ et $q_{2n+1} - q_{2n-1} = \dfrac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} > 0$.
Ainsi la suite $(q_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante, et la suite $(q_{2n-1})_{n\geq 1}$ est croissante.
On sait par $(4a)$ que ces suites convergent vers Φ. Elles sont donc adjacentes. [Q]

(d) Pour tout $N \geq 1$, on a $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{N} (q_{n+1} - q_n) = q_{N+1} - q_1 = q_{N+1} - q_1$.
Or $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \Phi$. On en déduit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}} = \Phi - 1$. [Q]

(e) On observe d'abord que $v_1 = q_1 = 1$.
D'autre part, pour tout $n \geq 1$, $q_{n+1} = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \dfrac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \dfrac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{q_n}$.
Ainsi $(q_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{\geq 1}$ ont même terme initial et vérifient la même récurrence.
On en déduit l'égalité $v_n = q_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Troisième partie

1. (a) On a $\Phi^2 = \Phi + 1$ donc $p = [n\Phi^2] = [n\Phi + n] = [n\Phi] + n$. [Q]

   (b) On a les inégalités $p \leq m\Phi < p+1$ et $p \leq n\Phi^2 < p+1$.
   On en déduit les inégalités $m\Phi < n\Phi^2 + 1$ et $n\Phi^2 < m\Phi + 1$.
   Il en résulte les inégalités $n\Phi + \widehat{\Phi} < m < n\Phi - \widehat{\Phi}$ donc $n\Phi - 1 < m < n\Phi + 1$.
   On en déduit $[n\Phi] - 1 < m \leq [n\Phi] + 1$ donc $m \in \{[n\Phi], [n\Phi]+1\}$. [Q]

   (c) On a $m = [n\Phi] < n\Phi$ car $\Phi \notin \mathbb{Q}$. Ici $p = m + n$, donc $m < (p-m)\Phi$.
   Cette inégalité s'écrit $m(1+\Phi) < p\Phi$, c'est-à-dire $m\Phi^2 < p\Phi$ donc $m\Phi < p$.
   Mais ce résultat contredit $p = [m\Phi]$ c'est-à-dire $p \leq m\Phi < p+1$. [Q]

   (d) On a $m = [n\Phi] + 1 > n\Phi$. Ici $p = m - 1 + n$, donc $m > (p - m + 1)\Phi$.
   Cette inégalité s'écrit $m(1+\Phi) > (p+1)\Phi$ donc $m\Phi > p+1$.
   Mais ce résultat est absurde car $p = [m\Phi]$ donc $p \leq m\Phi < p+1$.
   L'hypothèse que $E_1(\Phi)$ et $E_2(\Phi)$ ont un point commun est donc absurde.
   Il en résulte que ces deux ensembles forment deux parties disjointes de $\mathbb{N}^*$. [Q]

2. (a) Puisque $\Phi > 1$, les suites $k \mapsto [k\,\Phi]$ et $k \mapsto [k\,\Phi^2]$ sont strictement croissantes.
   Il en résulte que $\begin{cases} \text{card}(E_1^m(\Phi)) = \text{card}(J_{2m-1}) = F_{2m-1} \\ \text{card}(E_2^m(\Phi)) = \text{card}(J_{2m-2}) = F_{2m-2} \end{cases}$ [Q]

   (b) D'après (II 2 *c*), on sait que $[\Phi F_{2m-1}] = F_{2m}$ et que $[\Phi F_{2m-2}] = F_{2m-1} - 1$.
   Si $1 \leq k \leq F_{2m-1}$ alors $1 \leq [k\,\Phi] \leq [\Phi F_{2m-1}] = F_{2m}$.
   Ce résultat signifie que $E_1^m(\Phi)$ est une partie de J_{2m}.
   Si $1 \leq k \leq F_{2m-2}$ alors $1 \leq [k\,\Phi^2] \leq [\Phi^2 F_{2m-2}]$.
   Or $[\Phi^2 F_{2m-2}] = [(1+\Phi)F_{2m-2}] = F_{2m-2} + [\Phi F_{2m-2}] = F_{2m-2} + F_{2m-1} - 1 = F_{2m} - 1$.
   Pour tout k de $\{1, 2, \ldots, F_{2m-2}\}$, on a donc $1 \leq [k\,\Phi^2] \leq F_{2m}$.
   Cela signifie que $E_2^m(\Phi)$ est également une partie de J_{2m}. [Q]

   (c) On sait que $E_1^m(\Phi)$ et $E_2^m(\Phi)$ sont des parties de J_{2m}.
   Elles sont disjointes car $E_1^m(\Phi) \subset E_1(\Phi)$, $E_2^m(\Phi) \subset E_2(\Phi)$ et $E_1(\Phi) \cap E_2(\Phi) = \emptyset$.
   On en déduit : $\begin{aligned} \text{card}(E_1^m(\Phi) \cup E_2^m(\Phi)) &= \text{card}(E_1^m(\Phi)) + \text{card}(E_2^m(\Phi)) \\ &= F_{2m-1} + F_{2m-2} = F_{2m} = \text{card}(J_{2m}) \end{aligned}$
   Il en découle que la réunion $E_1^m(\Phi) \cup E_2^m(\Phi)$ est égale à J_{2m} tout entier.
   Ainsi les ensembles $E_1^m(\Phi)$ et $E_2^m(\Phi)$ forment une partition de J_{2m}. [Q]

   (d) On se donne un entier n quelconque dans $\mathbb{N}^*$.
   Il existe un entier m tel que $n \leq F_{2m}$ c'est-à-dire tel que n appartienne à J_{2m}.
   D'après ce qui précède, on a $n \in E_1^m(\Phi)$ ou $n \in E_2^m(\Phi)$.
   Dans le premier cas, n est dans $E_1(\Phi)$, et dans le deuxième il est dans $E_2(\Phi)$.
   Conclusion : la réunion des ensembles $E_1(\Phi)$ et $E_2(\Phi)$ est égale à $\mathbb{N}^*$. Comme ces deux ensembles sont disjoints, ils forment une partition de $\mathbb{N}^*$. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3. (a) Puisque $1 < a < b$, on a les inégalités $na < nb$ et $na^2 < nb^2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Il en résulte évidemment $[na] \leq [nb]$ et $[na^2] \leq [nb^2]$ pour tout $n \geq 1$. [Q]

(b) Pour $n > \dfrac{1}{b-a}$, on a $n(b-a) > 1$ donc $nb > na + 1$ donc $[nb] \geq [na] + 1$.
L'ensemble des entiers n tel que $[na] < [nb]$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}^*$.
Il en résulte que cette partie possède un plus petit élément p.
Pour les mêmes raisons, il existe un entier q minimum tel que $[qa^2] < [qb^2]$. [Q]

(c) On suppose donc qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $[pa] = [nb]$.
On sait que $[pa] < [pb]$. Il en résulte $[nb] < [pb]$ donc $n < p$.
Mais par définition de p, l'inégalité $n < p$ implique $[na] = [nb]$.
Il en découle $[na] = [pa]$, donc $n = p$, ce qui est absurde.
Ainsi l'entier $[pa] \geq 1$ n'est pas dans l'ensemble $E_1(b)$.
Il est donc dans $E_1(b)$, car $E_1(b)$ et $E_2(b)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
Autrement dit, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $[pa] = [rb^2]$. [Q]

(d) Si on avait $r < q$, il en résulterait $[ra^2] = [rb^2]$ (par définition de q.)
On en déduirait $[ra^2] = [pa]$, ce qui est absurde car $E_1(a) \cap E_2(a) = \emptyset$.
On en déduit $r \geq q$ puis $[pa] = [rb^2] \geq [qb^2] > [qa^2]$. [Q]

(e) Supposons qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $[qa^2] = [nb^2]$.
Puisque $[qa^2] < [qb^2]$, il en découle $[nb^2] < [qb^2]$ donc $n < q$.
Mais par définition de q, l'inégalité $n < q$ implique $[na^2] = [nb^2]$.
Il en résulte $[qa^2] = [na^2]$ donc $q = n$, ce qui est contradictoire.
Ainsi l'entier $[qa^2] \geq 1$ n'est pas dans $E_2(b)$. Il est donc dans $E_1(b)$.
Autrement dit, il existe s dans $\mathbb{N}^*$ tel que $[qa^2] = [sb]$.
On sait $[qa^2] \neq [sa]$ car $E_2(a) \cap E_1(a) = \emptyset$. On en déduit $[sb] \neq [sa]$.
Par définition de l'entier p, cela implique $s \geq p$.
Il en découle $[qa^2] = [sb] \geq [pb] > [pa]$. [Q]

(f) Avec les notations précédentes, on est arrivé à $[qa^2] < [pa]$ et $[qa^2] > [pa]$.
Cette absurdité prouve qu'il n'existe pas deux réels distincts $x > 1$ tels que $E_1(x)$ et $E_2(x)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
Or on sait que le réel $x = \Phi$ possède cette propriété : il est donc le seul.
Le tableau suivant montre comment se répartissent les entiers de 1 à 30 :

$1 = [\Phi]$	$2 = [\Phi^2]$	$3 = [2\Phi]$	$4 = [3\Phi]$	$5 = [2\Phi^2]$	$6 = [4\Phi]$
$7 = [3\Phi^2]$	$8 = [5\Phi]$	$9 = [6\Phi]$	$10 = [4\Phi^2]$	$11 = [7\Phi]$	$12 = [8\Phi]$
$13 = [5\Phi^2]$	$14 = [9\Phi]$	$15 = [6\Phi^2]$	$16 = [10\Phi]$	$17 = [11\Phi]$	$18 = [7\Phi^2]$
$19 = [12\Phi]$	$20 = [8\Phi^2]$	$21 = [13\Phi]$	$22 = [14\Phi]$	$23 = [9\Phi^2]$	$24 = [15\Phi]$
$25 = [16\Phi]$	$26 = [10\Phi^2]$	$27 = [17\Phi]$	$28 = [11\Phi^2]$	$29 = [18\Phi]$	$30 = [19\Phi]$

[Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Quatrième partie : le jeu de Wythoff

1. On suppose que les colonnes contiennent respectivement a_n et $b_n = a_n + n$ pièces.
   La différence $n = b_n - a_n$ est caractéristique du niveau de configuration.
   Il est donc clair que si on retire autant de pièces aux deux colonnes, celles-ci ne sont plus *configurées* (la différence n est restée la même, mais les hauteurs ne sont plus a_n ou b_n.)

   De même, si on retire des pièces dans une seule colonne, l'ensemble n'est plus configuré (si une pile contient encore a_n pièces, l'autre n'en contient plus b_n, et inversement : on utilise ici le fait que les ensembles $\{a_n, n \geq 1\}$ et $\{b_n, n \geq 1\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, et que les a_n sont distincts deux à deux, ainsi que les b_n.) [Q]

2. Notons x et y les hauteurs de ces deux colonnes, avec $0 \leq x \leq y$.
   Remarque : il est possible qu'on ait $x = y$, si le joueur précédent est très maladroit !
   - Si $x = 0$ (nécessairement $y \geq 1$), on retire toutes les pièces de la pile de hauteur y.
     On arrive ainsi à la configuration 0, et on est le vainqueur !
   - Si $x = y \geq 1$, on vide les deux colonnes en même temps, et on a gagné.
   - Si $1 \leq x < y$, soit $n = y - x \geq 1$ la différence des deux hauteurs.
     On va comparer x avec $a_n = [n\Phi] \geq 1$ (on a $x \neq a_n$, sinon $y = a_n + n = b_n$.)
     - ◇ Si $x > a_n$, alors on enlève $c = x - a_n$ pièces aux deux colonnes.
       Les hauteurs deviennent a_n et $y - x + a_n = n + a_n = b_n$, et les colonnes sont configurées.
     - ◇ Si $x < a_n$, alors deux cas se présentent.
       - Ou bien il existe $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $x = a_p$. On a $p < (n = b - a)$.
         On enlève alors $c = n - p$ pièces de la colonne qui en contient y.
         Les hauteurs sont alors a_p et $y - n + p = x + p = b_p$: les colonnes sont configurées.
       - Ou bien il existe $q \geq 1$ tel que $x = b_q = a_q + q$.
         Dans ce cas on enlève $c = y - a_q$ de la colonne qui en contient y.
         Dans cette colonne il reste a_q pièces et on est en configuration (a_q, b_q).

   Conclusion : quand on part d'une situation où les colonnes ne sont pas configurées, on peut toujours jouer de telle sorte qu'elles le deviennent. [Q]

3. Si au départ les colonnes sont configurées, alors le deuxième joueur va gagner s'il maintient, à chaque fois que c'est son tour de jouer, les deux colonnes en position configurée (on sait que l'autre joueur rompt toujours la configuration.) Si au départ elles ne sont pas configurées, c'est le premier joueur qui a une stratégie gagante (il configure les colonnes lors du premier tour, et il maintient la configuration tout le long de la partie.) [Q]

4. On vérifie que $17 = [11\Phi]$ et $28 = [11\Phi^2]$.
   On part donc d'une position configurée. Le mieux est de laisser l'autre commencer ! [Q]

5. C'est bien sûr le même jeu, en remplaçant les hauteurs des colonnes de pièces par les coordonnées (x, y) de la reine. Un déplacement horizontal ou vertical correspond à une diminution de la hauteur d'une seule pile de pièces, alors qu'un déplacement diagonal correspond à une diminution égale des deux colonnes.
   Dans la situation de l'exemple, on a $x = 11$ et $y = 9$ (on compte à partir de 0.)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On a $9 = [6\Phi]$ et $11 = [7\Phi]$: on n'est pas en position configurée.
Il faut donc mieux jouer en premier. Ici $x - y = 2$, et $a_2 = 3$ donc $y < a_2$.
On se déplace donc en diagonale de $y - a_2 = 6$ cases, pour aller en $(5, 3) = (b_2, a_2)$. [Q]

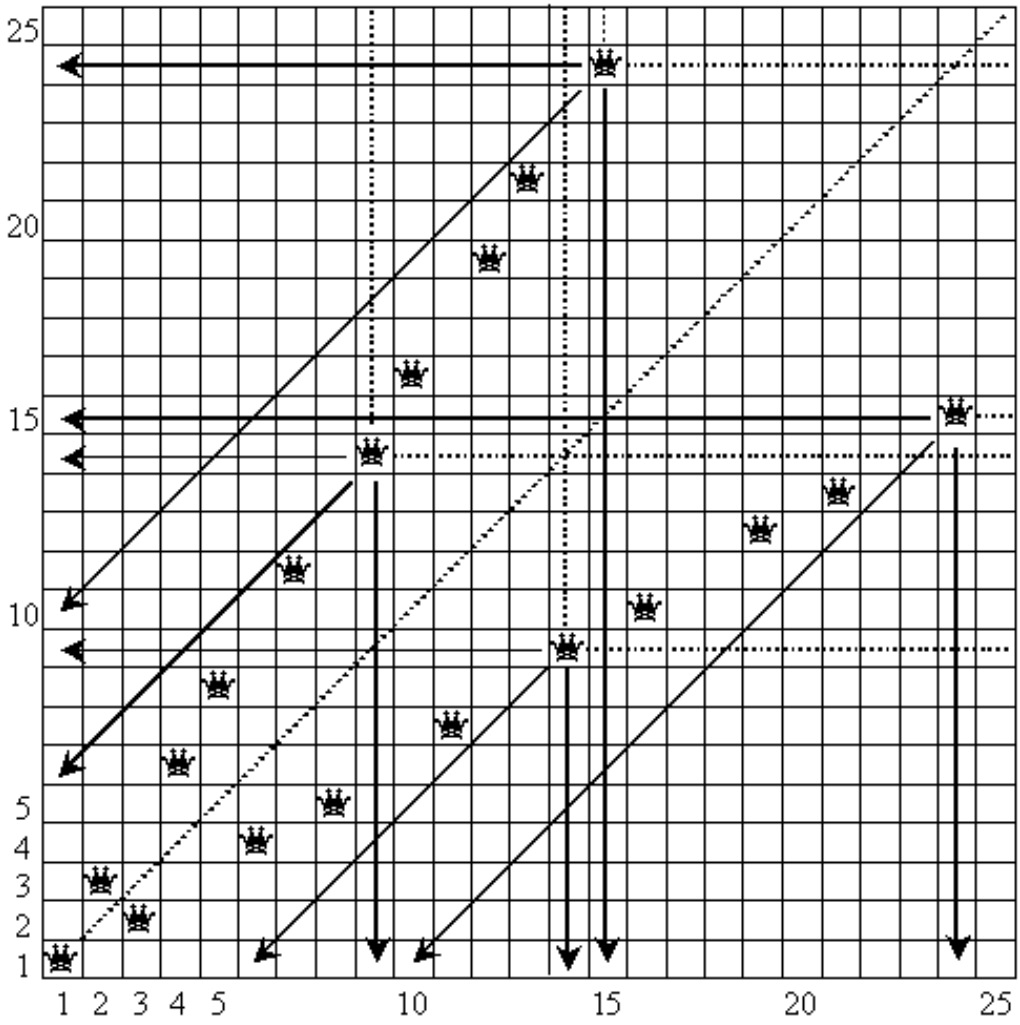
On a représenté ci-dessous un échiquier de taille 25×25.

Sur cet échiquier on a représenté (par une reine) les positions gagnantes (disons plutôt les positions à partir desquelles on est sûr de pouvoir gagner si on ne fait pas d'erreur.)

Ces positions gagnantes sont les cases de coordonnées $\{x, y\} = \{[n\Phi], [n\Phi^2]\}$.

On trouve ainsi les couples (x, y) ou (y, x) définis par :

$\{x, y\} \in \{\{0, 0\}, \{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 7\}, \{6, 10\}, \{8, 13\}, \{9, 15\}, \{11, 18\}, \{12, 20\}, \{14, 23\}\}$



A partir de toute position gagnante, un déplacement conduit à une position non gagnante (autrement dit, deux quelconques des reines ci-dessus ne sont jamais en prise.)

Enfin à partir de toute position (non gagnante) de l'échiquier, on peut se déplacer en un seul mouvement vers une position gagnante (exemples de trajectoires en pointillé.)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021