HEC, ESCP-EAP, EM Lyon 2003, Math 2, option scientifique.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et à valeurs réelles.
L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $E(X)$. Si A est un événement de probabilité non nulle on note $P(E/A)$ la probabilité conditionnelle sachant A de l'événement E.
Si n est un entier naturel non nul et si $x_1, \ldots, x_n$ sont n réels on note $\min(x_1, \ldots, x_n)$ ou $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ le plus petit d'entre eux.
On rappelle que deux variables aléatoires X et Y prenant des valeurs positives ou nulles sont indépendantes si et seulement si, pour tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on a :

$$P([X \leqslant a] \cap [Y \leqslant b]) = P([X \leqslant a])P([Y \leqslant b])$$

On rappelle qu'une variable aléatoire X prenant des valeurs positives ou nulles suit une loi exponentielle si et seulement si elle vérifie la propriété, dite d'absence de mémoire :

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2 \qquad P([X > x + y]/[X > x]) = P([X > y])$$

L'objet du problème est l'obtention de diverses caractérisations de la loi exponentielle.

Partie I: Un résultat d'analyse

On considère une fonction réelle φ continue sur $[0, 1]$. On note M le maximum de la fonction $|\varphi|$ sur $[0, 1]$.
Pour tout entier naturel n non nul et tout réel v de $[0, 1]$, on note $Y_{n,v}$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et v.

1) Soit n un entier naturel non nul, x un réel de $]0, 1[$, ε un réel strictement positif vérifiant les inégalités

$$0 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < 1$$

a) Comparer, pour tout réel v de $[x+\varepsilon, 1]$, les événements $[Y_{n,v} \leqslant nx]$ et $[|Y_{n,v} - nv| \geqslant n(v-x)]$ et en déduire les inégalités :

$$P([Y_{n,v} \leqslant nx]) \leqslant \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

b) Justifier d'une façon analogue, pour tout réel v de $[0, x - \varepsilon]$, l'inégalité :

$$P([Y_{n,v} > nx]) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

c) Établir les inégalités :

$$\left|\int_{x+\varepsilon}^{1} \varphi(v) P([Y_{n,v} \leqslant nx])\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{M(1-x)}{2n\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \left|\int_{0}^{x-\varepsilon} \varphi(v)\big(1 - P([Y_{n,v} \leqslant nx])\big)\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{Mx}{2n\varepsilon^2}$$

d) En déduire l'inégalité :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v) P([Y_{n,v} \leqslant nx])\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \big(\frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon\big)M$$

2) Établir que, pour tout réel x de $]0, 1[$, on a, pour tout entier naturel n assez grand, l'inégalité :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v) P([Y_{n,v} \leqslant nx])\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$$

3) On suppose maintenant que la fonction φ vérifie, pour tout entier naturel n,

$$\int_0^1 \varphi(v) v^n\,\mathrm{d}v = 0$$

a) Justifier, pour tout polynôme P à coefficient réels, l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(v)P(v)\,\mathrm{d}v = 0.$

b) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x de $]0,1[$, on a l'égalité :

$$\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v = 0$$

c) Montrer que la fonction φ est nulle.

Ainsi, on a montré dans cette partie que si φ est une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant pour tout entier naturel n, $\int_0^1 \varphi(v)v^n\,\mathrm{d}v = 0$, alors φ est nulle.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires **indépendantes, positives ou nulles**, admettant toutes la même densité (nulle sur l'intervalle $]-\infty,0[$) dont on note f la restriction à l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose que la fonction f est continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$.
On note F la restriction à l'intervalle $[0,+\infty[$ de la fonction de répartition commune à toutes ces variables.
On suppose de plus que X_1 (et donc chaque variable X_i) admet une espérance.

Partie II: Caractérisations de la loi exponentielle à l'aide du minimum d'un n-échantillon

Pour tout entier naturel n non nul, on note I_n l'application définie, pour tout ω de Ω, par $I_n(\omega) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i(\omega)$ et on **admet** que I_n est une variable aléatoire qui admet une espérance.

1) Déterminer à l'aide de F, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de I_n.

2) Dans cette question, on suppose que la loi de X_1 (qui est la loi commune à tous les X_i) est exponentielle de paramètre λ strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, la variable nI_n a même loi que X_1.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, l'espérance de I_n.

L'objet des questions suivantes est d'établir que chacune de ces propriétés est caractéristique de la loi exponentielle.

3) Dans cette question, on suppose que, pour tout entier naturel n non nul, nI_n a même loi que X_1.

a) Établir, pour tout entier naturel n non nul et tout réel x positif ou nul, l'égalité :

$$F(x) = 1 - \Big(1 - F(\frac{x}{n})\Big)^n$$

b) Déterminer, pour tout réel x positif ou nul, la valeur de : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\Big(1 - F(\frac{x}{n})\Big)$.

c) Montrer que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre $F'(0)$.

4) On revient au cas général.

a) Montrer que la fonction F réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$. On note F^{-1} sa réciproque.

b) À l'aide d'un changement de variable, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$E(I_n) = n\int_0^1 F^{-1}(u)(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

c) Établir, pour tout réel u de $[0,1[$, les inégalités :

$$0 \leqslant (1-u)F^{-1}(u) \leqslant \int_u^1 F^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que la fonction G définie sur $[0,1]$ par $G(u) = (1-u)F^{-1}(u)$ si u est élément de $[0,1[$ et par $G(1) = 0$ est continue.

Établir, pour tout entier n au moins égal à 2, les égalités :

$$E(I_n) = n\int_0^1 G(u)(1-u)^{n-2}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad E(I_n) = n\int_0^1 G(1-v)v^{n-2}\,\mathrm{d}v$$

d) On suppose maintenant qu'il existe un réel λ strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, l'espérance de I_n est égale à $\dfrac{1}{n\lambda}$.

On note F_λ la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ et G_λ la fonction définie sur $[0,1]$ par $G_\lambda(u) = (1-u)F_\lambda^{-1}(u)$ si u est élément de $[0,1[$ et par $G_\lambda(1) = 0$.

i. Quelle est, pour n entier naturel au moins égal à 2, la valeur de : $n\displaystyle\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2}\,\mathrm{d}v$?

ii. À l'aide du résultat de la partie I, montrer que G et G_λ sont égales.

iii. En déduire que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre λ.

Partie III: Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide des deux premiers records

On pose $R_1 = X_1$. On note R_2 l'application définie, pour tout élément ω de Ω, par :

$$R_2(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n \text{ est le plus petit des entiers } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_1(\omega) \\ X_1(\omega) & \text{si un tel entier n'existe pas.} \end{cases}$$

On admet que R_2 est une variable aléatoire.

A. Préliminaire

1) Exprimer l'événement $[R_2 = R_1]$ à l'aide de la suite d'événements $\big([X_k \leqslant X_1]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

2) Établir, pour tout réel t positif ou nul et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$P\Big(\bigcap_{k=2}^{n+1}[X_k \leqslant X_1]\Big) \leqslant \big(F(t)\big)^{n+1} + 1 - F(t)$$

3) Soit ε un réel strictement positif. En choisissant un réel t de façon convenable et à l'aide de l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier n assez grand, on a :

$$P\Big(\bigcap_{k=2}^{n+1}[X_k \leqslant X_1]\Big) \leqslant 2\varepsilon$$

Comment énoncer le résultat obtenu ?

4) En déduire que, presque sûrement, $R_2 > R_1$.

B. La caractérisation

Pour tout couple (x,y) de réels positifs ou nuls on pose : $\varphi(x,y) = P\big([R_1 \leqslant x] \cap [R_2 - R_1 > y]\big)$.

1) Soit (x,y) un couple de réels positifs ou nuls et h un réel strictement positif.

a) Justifier l'égalité :

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\Big([x < X_1 \leqslant x+h] \cap \Big(\bigcap_{i=2}^{j}[X_i \leqslant X_1]\Big) \cap [X_{j+1} > y + X_1]\Big)$$

b) En déduire les inégalités :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x)}\big(1-F(x+y+h)\big) \leqslant \varphi(x+h,y)-\varphi(x,y) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x+h)}\big(1-F(x+y)\big)$$

2) Calculer, pour tout couple (x,y) de réels positifs ou nuls, la limite de $\dfrac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures et, en admettant que le résultat tient encore pour la limite quand h tend vers 0 par valeurs inférieures, en déduire l'égalité :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x)}{1-F(x)}\big(1-F(x+y)\big)$$

3) Dans cette question on suppose que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre λ strictement positif.

a) Établir, pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls, l'égalité : $\varphi(x, y) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})\mathrm{e}^{-\lambda y}$.

b) En déduire la loi de $R_2 - R_1$ puis l'indépendance des variables R_1 et $R_2 - R_1$.

4) Réciproquement, dans cette question, on suppose que les variables R_1 et $R_2 - R_1$ sont indépendantes et on note G la fonction de répartition de $R_2 - R_1$.

a) Établir, pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls, l'égalité : $\dfrac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = 1 - G(y)$.

b) En déduire que les fonctions G et F sont égales puis, à l'aide de la propriété d'absence de mémoire, montrer que la loi de X_1 est exponentielle.