



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

CODE ÉPREUVE :

296  
EML\_MATE

1<sup>ère</sup> épreuve (option économique)

## MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### EXERCICE 1

On considère les éléments suivants de  $M_3(\mathbb{R})$  :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $E$  le sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$  engendré par  $I$ ,  $J$  et  $K$ .

Pour toute matrice  $M$  de  $E$ , on note  $M^0 = I$ , et si  $M$  est inversible, on note, pour tout entier naturel  $k$ ,  $M^{-k} = (M^{-1})^k$ , et on rappelle qu'alors  $M^k$  est inversible et que  $(M^k)^{-1} = M^{-k}$ .

- Déterminer la dimension de  $E$ .
- Calculer  $J^2$ ,  $JK$ ,  $KJ$  et  $K^2$ .
- Soit la matrice  $L = I + J$ .
  - Montrer, pour tout entier naturel  $n$  :
$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$
  - Vérifier que  $L$  est inversible et montrer, pour tout entier relatif  $n$  :
$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K.$$
  - Exprimer, pour tout entier relatif  $n$ ,  $L^n$  à l'aide de  $I$ ,  $L$ ,  $L^2$  et  $n$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  de  $M_3(\mathbb{R})$  et on note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$

représenté par la matrice  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $e$  l'application identique de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même.

4. Montrer que  $f$  admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.  
Est-ce que  $f$  est diagonalisable ?
- 5.a. Soit  $w = (1, 0, 0)$ .  
Calculer  $v = (f - e)(w)$  et  $u = (f - e)(v)$ .  
Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- b. Déterminer la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $(u, v, w)$ .
- c. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et, pour tout entier relatif  $n$ , exprimer  $f^n$  à l'aide de  $e, f, f^2$  et  $n$ .

## EXERCICE 2

On considère l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout réel  $t$ , par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{(t+1)^2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.
3. Montrer que, pour tout réel  $x$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^x f(t) dt$  converge, et calculer cette intégrale.  
*On distinguera les cas  $x \leq 0$  et  $x > 0$ .*

4. Déterminer un réel positif  $\alpha$  tel que  $\int_0^\alpha f(t) dt = \frac{1}{2}$ .

5. Soit  $x \in [0; +\infty[$  fixé.

On considère la fonction  $\varphi_x$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $\forall u \in [0; +\infty[, \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t) dt$ .

- a. Calculer  $\varphi_x(0)$  et  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_x(u)$ .

- b. Montrer :  $\forall (u, v) \in ([0; +\infty[)^2, u < v \implies \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t) dt$ .

En déduire que  $\varphi_x$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

- c. On admet que  $\varphi_x$  est continue sur  $[0; +\infty[$ . Montrer que l'équation  $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$ , d'inconnue  $u$ , admet une solution et une seule dans  $[0; +\infty[$ .

On note  $U : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application qui, à tout réel  $x \in [0; +\infty[$ , associe  $U(x)$  l'unique solution de l'équation  $\varphi_x(u) = 0$ .

Ainsi, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a : 
$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

- 6.a. Vérifier, pour tout  $x \in [0; \frac{1}{2}[$  :  $U(x) = 1 - x$ .

- b. Pour tout  $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$ , montrer :  $\varphi_x(x) \geq \frac{1}{2}$ , puis :  $x - U(x) \geq 0$ ,  
et en déduire :  $U(x) = \sqrt{4 + (x + 1)^2} - 2$ .

- 7.a. Montrer que l'application  $U$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .

- b. Étudier la dérivabilité de  $U$  sur  $[0; +\infty[$ .

- c. Montrer que la droite d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe représentative de  $U$ .

- d. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $U$ .

8. On considère la suite réelle  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par 
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U(a_n). \end{cases}$$

- a. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{2}$ .

- b. Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

- c. En déduire que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et montrer que sa limite est égale à  $\frac{1}{2}$ .

- d. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| \leq 10^{-6}.$$

## EXERCICE 3

### 1. Préliminaire :

Soit  $x \in ]0; 1[$ . Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec  $x$ , on définit deux suites de variables aléatoires  $(S_n)_{n \geq 1}$  et  $(T_n)_{n \geq 1}$  de la façon suivante :

★ pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $S_n$  est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le  $n$ -ième succès ;

★  $T_1$  est la variable aléatoire égale à  $S_1$  et pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $T_n$  est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le  $n$ -ième succès après le  $(n - 1)$ -ième succès.

Ainsi, pour tout  $n \geq 2$ ,  $T_n = S_n - S_{n-1}$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ .

- a. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, déterminer la loi de  $T_n$  et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de  $T_n$ .
- b. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , justifier l'indépendance des variables aléatoires  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .
- c. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, montrer que l'espérance et la variance de  $S_n$  sont définies et montrer :  $E(S_n) = \frac{n}{1-x}$  et  $V(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$ .
- d. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Déterminer la loi de  $S_n$ .

Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de  $\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k)$  ?

- e. En déduire, pour tout  $x \in ]0; 1[$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

2. Deux joueurs  $A$  et  $B$  procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est  $p$  ( $p$  fixé,  $p \in ]0; 1[$ ), et la probabilité d'obtenir face est  $q = 1 - p$ .

Le joueur  $A$  commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur  $A$ .

Le joueur  $B$  effectue alors autant de lancers que le joueur  $A$  et on note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur  $B$ .

- a. Rappeler la loi de  $X$  et, pour tout  $k \geq 1$ , donner la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = k$ .
- b. Quelles sont les valeurs prises par  $Y$  ?

- c. Montrer :  $P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} p q^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$ .

- d. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Montrer :  $P(Y = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$ ,

puis, en utilisant 1.e,

$$P(Y = n) = \frac{1}{(1+q)^2} \left( \frac{q}{1+q} \right)^{n-1}.$$