



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE ÉPREUVE :

280

HEC_M1_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES I

Mercredi 18 Mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On rappelle que :

- pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(x-1) \ln t} e^{-t} dt$ est convergente ;
- la fonction Γ est définie sur \mathbb{R}^{+*} , et associe à tout réel x strictement positif, le réel strictement positif $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$;
- pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Pour tout entier naturel k non nul, et pour toute fonction f définie sur \mathbb{R}^{+*} , k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de la fonction f . Les dérivées première et seconde sont également notées f' et f'' .

Dans les parties II et III du problème, \exp désigne la fonction exponentielle. Les parties III et IV sont indépendantes.

Le problème a pour objet la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction Γ .

Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a) Pour tout réel u tel que $0 \leq u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leq -u$. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, l'inégalité : $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}]$ qui, à tout réel t de $[0, \sqrt{n}]$ associe :

$$\varphi(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)$$

Établir, pour tout réel t de $[0, \sqrt{n}]$, l'inégalité :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

c) Justifier, pour tout réel t de $[0, n]$, les inégalités :

$$e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

2. a) Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier naturel n non nul, montrer que les intégrales $\int_0^1 y^{x-1} dy$ et $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$ sont convergentes.

On pose alors $B_0(x) = \int_0^1 y^{x-1} dy$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $B_n(x) = \int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* , l'égalité :

$$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

En déduire, pour tout n de \mathbb{N} , la formule :

$$B_n(x) = \frac{\Gamma(x) \times \Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}$$

c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+n) \sim n^x (n-1)!$, lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $\lambda_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Montrer que $\lambda_n \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^k e^{-t} dt$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

b) Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R}^{+*} . Soit x_0 et x deux éléments distincts de $]a, b[$. Établir l'inégalité :

$$|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x - x_0)g_1(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} dt$$

c) Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} dt \leq \int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1} e^{-t} dt$$

En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

d) Établir que la fonction Γ est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et que $\Gamma' = g_1$.

On montrerait de même que la fonction Γ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^{+} , et que $\Gamma'' = g_2$. Ce résultat est admis dans toute la suite du problème.*

2. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité suivante : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < \gamma_n \leq 1$.

b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

3. a) Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier n strictement positif, montrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \right] = \exp(-x\gamma_n) \times \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n^x n!}$$

b) On pose $v_n(x) = \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \right]$. Montrer que la suite $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation :

$$\ell(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}$$

4. a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, $n \geq 1$, est convergente.

b) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité :

$$\ln(\ell(x)) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right]$$

En déduire, pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right]$$

5. Soit ψ la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par $\psi(x) = \frac{d}{dx} [\ln(\Gamma(x))]$.

Établir, pour tout réel x strictement positif l'égalité : $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$.

Déterminer un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque x tend vers 0^+ . Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la formule :

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction U_n définie sur \mathbb{R}^{+*} par :

$$U_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}$$

On désigne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

a) Montrer que A est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^{+*} . En particulier, exprimer pour tout réel x strictement positif, $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

b) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

Dans toute la suite du problème, **on admet** les deux résultats suivants : pour tout réel x strictement positif on a

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) \text{ et } A''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n''(x)$$

7. Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ . En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln n - \psi(n))$.

8. On veut établir dans cette question que pour tout réel y strictement positif, on a $\psi'(y) > \frac{1}{y}$.

Soit x un réel strictement positif fixé. On considère la fonction G définie sur \mathbb{R}^{+*} qui, à tout réel t strictement positif, associe $G(t) = \frac{1}{(t+x)^2}$.

a) Montrer que sur \mathbb{R}^{+*} , G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} G(t)dt$ est convergente.

b) En déduire la double inégalité : $0 < \int_1^{+\infty} G(t)dt < \sum_{k=1}^{\infty} G(k)$.

c) Établir l'inégalité : $\psi'(x) > \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}$. Conclure.

Partie III. Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$

On considère une variable aléatoire X , qui suit une loi $\Gamma(\theta, r)$, les deux paramètres inconnus θ et r étant des réels strictement positifs. Une densité f de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)\theta^r} \times x^{r-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On considère un p -échantillon *i.i.d.* (X_1, X_2, \dots, X_p) de la loi de X : les variables aléatoires X_1, \dots, X_p sont mutuellement indépendantes et de même loi que X .

On désigne par x_1, x_2, \dots, x_p , un p -échantillon de réalisations des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_p , respectivement ; les réels x_1, x_2, \dots, x_p sont fixés, strictement positifs et non tous égaux.

Soit L la fonction (appelée *fonction de vraisemblance*) définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} qui, à tout couple (θ, r) de réels strictement positifs, associe :

$$L(\theta, r) = \prod_{i=1}^p f(x_i)$$

On pose $F(\theta, r) = \ln(L(\theta, r))$.

1. Montrer que la recherche du maximum de L sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ est équivalente à la recherche du maximum de F sur ce même ensemble.

2. a) Établir l'existence sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction F . Les calculer.

b) Montrer que les éventuels points critiques (θ^*, r^*) vérifient le système (S) d'équations suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \theta^* r^* = \bar{x} & (1) \\ \ln r^* - \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = \ln \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln x_i & (2) \end{cases}$$

dans lequel $\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$.

3. On pose $K_p = \ln \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln x_i$.

a) Justifier, pour tout réel $x > 0$ et différent de 1, l'inégalité : $\ln x < x - 1$. En déduire que $K_p > 0$.

b) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par :

$$h(y) = \ln y - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - K_p$$

Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que l'équation (2) admet sur \mathbb{R}^{+*} une unique solution r^* . En déduire que le système d'équations (S) admet une unique solution (θ^*, r^*) .

4. Écrire la hessienne $\nabla^2 F$ de F au point (θ^*, r^*) .

En déduire qu'au point (θ^*, r^*) , la fonction L admet un maximum local.

On peut démontrer qu'en ce point, on obtient en fait un maximum global de L . On dit que le couple (θ^*, r^*) est une estimation du couple inconnu (θ, r) obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance.

Partie IV. Estimateur sans biais de l'écart-type σ d'une loi normale centrée

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée et d'écart-type σ ; le paramètre réel inconnu σ est strictement positif.

1. Montrer que la variable aléatoire $T = \frac{X^2}{2\sigma^2}$ suit une loi γ de paramètre 1/2. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

2. Pour n entier naturel non nul, on considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) i.i.d. (indépendant, identiquement distribué) de la loi de X .

a) On désigne par S_n la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{2\sigma^2}$. Quelle est la loi de probabilité de S_n ?

b) En déduire que la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, est un estimateur sans biais de σ^2 .

3. a) Montrer que l'espérance de $\sqrt{Y_n}$, notée $E(\sqrt{Y_n})$, vérifie : $E(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.

b) Donner l'expression de $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ .

c) Montrer que la variable aléatoire $\widehat{\sigma}_n$ définie par :

$$\widehat{\sigma}_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2}$$

où λ_n a été défini dans la question I.2.d, est un estimateur sans biais du paramètre σ .

4. a) Calculer la variance $V(\widehat{\sigma}_n)$ de l'estimateur $\widehat{\sigma}_n$ en fonction de n et σ .

b) La suite $(\widehat{\sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de σ converge-t-elle en probabilité vers σ ?