



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

CODE ÉPREUVE :

283

CCIP_M2_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES II

Mardi 10 Mai 2005, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n et r désignent des entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices rectangulaires à n lignes et r colonnes à coefficients réels. Pour $n = r$, on pose $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Pour tout entier n de \mathbb{N}^* , on identifie \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La transposée d'une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ est notée tA . On pourra également la noter A^T .

On étudie dans ce problème, quelques propriétés du *modèle linéaire*, qui constitue l'instrument de base de l'économétrie.

Partie I. Trace et matrices aléatoires

Pour toute matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace de M* , notée $\text{tr}(M)$, la somme de ses coefficients diagonaux ; ainsi, si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$.

On rappelle les trois résultats suivants (que les candidats n'ont pas à démontrer) :

- l'application tr qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe sa trace, est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} ;
- si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$;
- si M et N sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(M) = \text{tr}(N)$.

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant q valeurs propres ($1 \leq q \leq n$) notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$. Pour tout entier i de $\llbracket 1, q \rrbracket$, on désigne par n_i la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .

a) On suppose que la matrice M est diagonalisable sur \mathbb{R} . Montrer que $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^q n_i \lambda_i$.

b) On suppose que la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique. Montrer les égalités suivantes :

$$\text{tr}({}^tMM) = \text{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^q n_i \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2$$

2. Pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout entier j de $\llbracket 1, r \rrbracket$, on considère des variables aléatoires réelles $Z_{i,j}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On définit la *matrice aléatoire* Z , à n lignes et r colonnes, en associant à tout ω de Ω , la matrice :

$$Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_{1,1}(\omega) & \dots & Z_{1,r}(\omega) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n,1}(\omega) & \dots & Z_{n,r}(\omega) \end{pmatrix} = (Z_{i,j}(\omega))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$$

On suppose que les nr variables aléatoires $Z_{i,j}$ admettent une espérance $E(Z_{i,j})$, et on définit l'espérance de la matrice Z , notée $E(Z)$, comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les espérances $E(Z_{i,j})$, soit $E(Z) = (E(Z_{i,j}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$.

Si Z et W sont deux matrices aléatoires à n lignes et r colonnes admettant chacune une espérance, et si λ est réel, on remarquera que $E(\lambda Z + W) = \lambda E(Z) + E(W)$.

Dans le cas où $n = r$, on appelle trace de Z , notée $\text{tr}(Z)$, la variable aléatoire définie par $\text{tr}(Z) = \sum_{i=1}^n Z_{i,i}$ et si $n = r = 1$, la matrice aléatoire Z coïncide avec la variable aléatoire Z et on a $\text{tr}(Z) = Z$.

Dans le cas où $r = 1$ et n est quelconque, si $T = {}^t(T_1 \dots T_n)$ et $W = {}^t(W_1 \dots W_n)$ sont deux vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n , et si λ est un réel quelconque, on définit le vecteur aléatoire $\lambda T + W$ de \mathbb{R}^n par

$$\lambda T + W = {}^t(\lambda T_1 + W_1 \dots \lambda T_n + W_n)$$

a) Soit Z une matrice aléatoire à n lignes et r colonnes admettant une espérance $E(Z)$. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. Montrer que $E(AZ) = AE(Z)$. Soit B un élément de $\mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$, avec $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $E(ZB) = E(Z)B$.

b) Soit Z une matrice aléatoire à n lignes et n colonnes admettant une espérance $E(Z)$. Établir les deux égalités : $E({}^tZ) = {}^t(E(Z))$ et $E(\text{tr}(Z)) = \text{tr}(E(Z))$.

3. Dans cette question, Y désigne un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n , noté $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$, admettant une espérance $E(Y)$

et une matrice de variance-covariance notée $V(Y)$.

On rappelle que $V(Y) = E[(Y - E(Y)) \times {}^t(Y - E(Y))]$.

On admet que la définition et les propriétés de la matrice de variance-covariance $V(Y)$ d'un vecteur aléatoire discret restent valables pour un vecteur aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires quelconques (discrètes ou à densité).

Ainsi, en supposant que pour tout i de $[[1, n]]$ et pour tout j de $[[1, n]]$, la variable aléatoire $Y_i Y_j$ possède un moment d'ordre 1 au moins, on définit la covariance de Y_i et Y_j par $\text{cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j)$, et si Y_i et Y_j sont indépendantes, alors $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

a) Montrer que, pour tout vecteur aléatoire Y de \mathbb{R}^n , $V(Y) = E(Y {}^t Y) - E(Y)E({}^t Y)$.

b) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. Justifier l'égalité $V(BY) = BV(Y){}^t B$.

c) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $m = E(Y)$ et $J = V(Y)$. Établir les égalités : $E({}^t Y A Y) = \text{tr}(A \cdot E(Y {}^t Y))$ et $E({}^t Y A Y) = \text{tr}(A J) + {}^t m A m$.

Partie II. Le modèle linéaire

Dans les parties II.A et II.B, n et k sont deux entiers donnés qui vérifient $1 \leq k < n$. L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne canonique. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et admettent des moments d'ordre au moins 2.

On considère un échantillon de n individus extrait d'une population donnée. Ces individus sont décrits à l'aide de k variables statistiques réelles (caractères) C_1, C_2, \dots, C_k .

Pour tout entier j de $[[1, k]]$, chaque caractère C_j fait l'objet de n observations notées $x_{1,j}, \dots, x_{n,j}$. On définit ainsi une application linéaire f de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^n , dont la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^k et \mathbb{R}^n est la matrice $X = (x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$ de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On suppose que le rang de X est égal à k .

Soit $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n , dont les composantes U_1, \dots, U_n sont des variables aléatoires réelles

définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, mutuellement indépendantes et de même loi. On suppose que $E(U) = 0_n$ et $V(U) = \sigma^2 I_n$, où 0_n désigne le vecteur nul de \mathbb{R}^n , I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et σ un réel strictement positif inconnu.

Soit $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de \mathbb{R}^k dont les composantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont inconnues (α est un paramètre vectoriel)

On considère un vecteur aléatoire non nul, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^n tel que, pour tout i de $[[1, n]]$, la variable aléatoire

$$Y_i \text{ définie sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ s'écrit } Y_i = \sum_{j=1}^k x_{i,j} \alpha_j + U_i.$$

Sous forme matricielle, le modèle linéaire s'écrit $Y = X\alpha + U$. On s'intéresse dans cette partie II, à l'étude de quelques propriétés de ce modèle, liées à l'estimation des paramètres inconnus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et σ^2 .

Pour cela, on désigne par y et on note $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, le vecteur non nul de \mathbb{R}^n qui représente la réalisation sur l'échantillon considéré du vecteur aléatoire Y ; ainsi, pour tout i de $[[1, n]]$, y_i est la réalisation de la variable aléatoire Y_i .

Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ le vecteur de \mathbb{R}^n , dit vecteur d'écart, défini par $u = y - X\alpha$.

A. Quelques résultats algébriques

1. On considère l'endomorphisme h de \mathbb{R}^k dont la matrice H , dans la base canonique de \mathbb{R}^k , est définie par $H = {}^t X X$.

a) Montrer que H est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

b) En étudiant le noyau de h , montrer que le rang de h est égal à k . En déduire que la matrice H est inversible. On notera H^{-1} son inverse.

2. Dans cette question, on veut trouver, en fonction de y et X , les vecteurs α de \mathbb{R}^k qui minimisent $\|u\|$.

Montrer que ce problème admet une unique solution $\hat{\alpha}$ définie par $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix} = H^{-1} {}^t X y$.

3. Soit p le projecteur orthogonal de \mathbb{R}^n sur le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice X . On note P la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

a) Montrer que $p(y) = X\hat{\alpha}$. En déduire que $P = XH^{-1} {}^t X$. Vérifier que $P = P^2 = {}^t P$.

b) Établir que le rang de P et la trace de P sont égaux. Quelle est leur valeur commune ?

c) Montrer que les colonnes de X constituent une base de vecteurs propres de la matrice P , associés à la valeur propre 1.

d) Montrer qu'il existe une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, orthogonale, telle que $P = SD^t S$, où $D = (d_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice diagonale définie par :

$$\begin{cases} d_{i,i} = 1 & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ d_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Préciser les k premières colonnes de S .

4. Soit \hat{u} le vecteur de \mathbb{R}^n défini par $\hat{u} = y - X\hat{\alpha}$.

a) On pose $Q = I_n - P$. Montrer que $\hat{u} = Qu$. Vérifier que $Q = Q^2 = {}^t Q$. Calculer la trace de Q .

b) Exprimer ${}^t \hat{u} \hat{u}$ et ${}^t y Q y$ en fonction de Q et u .

5. Par définition, on dit qu'une matrice A symétrique réelle d'ordre n est positive, si pour tout vecteur z de \mathbb{R}^n , on a ${}^t z A z \geq 0$.

a) Montrer que A , symétrique réelle, est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

b) Soit L une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. Établir que ${}^t L L$ est symétrique réelle positive.

B. Estimation des paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et σ^2

1. Soit \hat{G} le vecteur aléatoire de \mathbb{R}^k défini par : $\hat{G} = H^{-1} {}^t X Y$.

a) Établir que $E(Y) = X\alpha$, et que $V(Y) = \sigma^2 I_n$. En déduire que $E(\hat{G}) = \alpha$ (\hat{G} est un estimateur sans biais de α , tandis que $\hat{\alpha}$ est une estimation sans biais de α).

b) Montrer que $V(\hat{G}) = \sigma^2 H^{-1}$.

2. On veut montrer dans cette question, que dans l'ensemble des estimateurs sans biais du paramètre α , de la forme tBY , où B est une matrice quelconque, non nulle de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, l'estimateur \widehat{G} est *optimal* dans le sens suivant : tout autre estimateur G^* sans biais du paramètre α , de la forme tBY est tel que la matrice $V(G^*) - V(\widehat{G})$ est positive.

Soit B une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On considère le vecteur aléatoire $\widehat{C} = {}^tBY$

a) Quelle condition doit satisfaire la matrice B pour que, pour tout vecteur α de \mathbb{R}^k , \widehat{C} soit un estimateur sans biais de α ?

b) En supposant cette condition vérifiée, on pose ${}^tF = {}^tB - H^{-1} {}^tX$. Calculer tFX , et montrer que la matrice $V(\widehat{C}) - V(\widehat{G})$ est positive.

3. On désigne par \widehat{U} le vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n défini par $\widehat{U} = \begin{pmatrix} \widehat{U}_1 \\ \vdots \\ \widehat{U}_n \end{pmatrix} = Y - X\widehat{G}$.

a) Montrer que $\widehat{U} = QU$.

b) Déterminer $E(\widehat{U})$ et $V(\widehat{U})$. Les variables aléatoires $\widehat{U}_1, \dots, \widehat{U}_n$ sont-elles indépendantes ?

c) Montrer que ${}^t\widehat{U}\widehat{U} = \sum_{i=1}^n \widehat{U}_i^2 = {}^tUQU = {}^tYQY$.

d) Calculer $E({}^t\widehat{U}\widehat{U})$. En déduire que la variable aléatoire s_n définie par $s_n = \frac{{}^t\widehat{U}\widehat{U}}{n-k} = \frac{{}^tYQY}{n-k}$ est un estimateur sans biais de σ^2 .

C. Étude d'une suite d'estimateurs

Dans cette partie, k est fixé dans \mathbb{N}^* . On veut montrer que la suite d'estimateurs $(s_n)_{n \geq k+1}$ de σ^2 , est convergente.

On suppose que, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire U_i possède des moments d'ordre 3 et 4 avec $E(U_i^3) = 0$ et $E(U_i^4) = 3\sigma^4$. On pose $Q = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Établir que ${}^tUQU = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{i,j} U_i U_j$.

2. Montrer que $E[({}^tUQU)^2] = \sigma^4[(\text{tr}(Q))^2 + 2 \text{tr}(Q^2)]$. En déduire que $E[({}^tUQU)^2] = \sigma^4(n-k)(n-k+2)$.

3. Calculer la variance $V(s_n)$ de la variable aléatoire s_n . Conclure.