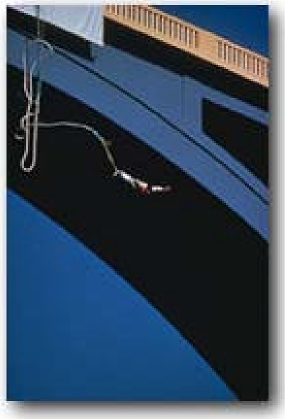
TD Dynamique du Point
Saut à l'Elastique



Objectif

On se propose de choisir un élastique pour effectuer un saut depuis le pont de PONSONNAS présentant une hauteur de chute de 103 m.

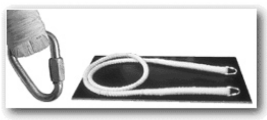
Mise en situation d'un saut à l'élastique

Le sauteur, assimilé à une masse (M) ponctuelle, se jette dans le vide sans vitesse initiale, depuis le point d'accrochage de l'élastique $(z=0)$.
La masse subit une chute libre tant que l'élastique n'est pas en extension
La masse est ensuite est retenue par l'élastique. La raideur de l'élastique n'étant pas constante, on assimilera son comportement à celui d'un élastique à raideur constante :
k_1 de 0% à 100% d'allongement, puis
k_2 de 100% à 200% d'allongement.
Dans le choix du type d'élastique et de sa longueur à vide, on s'interdit de dépasser les 200% d'allongement pour des questions de fiabilité de l'élastique.

L'élastique est constitué de 2 extrémités identiques et d'une âme intermédiaire constituée d'un assemblage de fils ronds en latex naturel extrudé

Pour effectuer votre choix, vous disposez chez les fabricants d'élastique, de 4 types d'élastiques suivant les poids des sauteurs :

- type **XS** : pour un poids du sauteur de 25 à 45 kg
- type **S** : pour un poids du sauteur de 40 à 70 kg
- type **M** : pour un poids du sauteur de 65 à 95 kg
- type **L** : pour un poids du sauteur de 90 à 120 kg



Elasticités équivalentes des élastiques de saut :

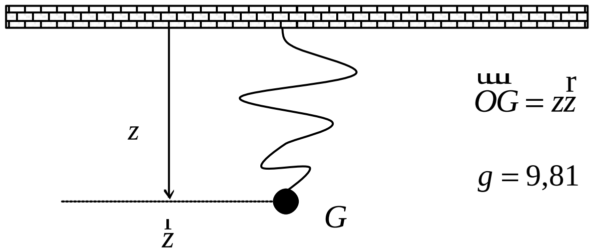
Pour un allongement de 100 % :
- type **XS** : tensionde 100 kg
- type **S** : tension de 160 kg
- type **M** : tension de 200 kg
- type **L** : tension de 250 kg

Pour un allongement de 200 % :
- type **XS** : tension de 160 kg
- type **S** : tension de 255 kg
- type **M** : tension de 325 kg
- type **L** : tension de 400 kg

Mécanique - Dynamique

TD : Saut à l'élastique

On paramètre le mouvement par la verticale descendante :



$\overrightarrow{OG} = z\vec{z}$

$g = 9{,}81 \ \text{m.s}^{-2}$

Questions

1. Dans la phase chute libre pendant « la longueur » de l'élastique choisi (L), la personne de masse de 100kg subit une accélération de la pesanteur égale à g=9,81 m/s^2.
Déterminer l'équation du mouvement et la durée de la chute libre.
2. Déterminer l'expression analytique de la vitesse atteinte à la fin de cette phase en fonction de la longueur de l'élastique L
3. En fonction de l'élastique choisi (**XS**, **S**, **M** ou **L**) déterminer l'équation du mouvement pendant la phase de décélération de 0 à 100% d'allongement de l'élastique.
4. En déduire la distance parcourue pendant cette phase de décélération. **On reprendra l'origine des z et des temps au début de cette phase.**
5. La personne souhaite atteindre la vitesse de chute libre de 100 Km.h^{-1}, déterminer la longueur minimale de corde à lui donner. Arrondir à une valeur entière.
6. Déterminer les distances totales de chute pour les quatre types d'élastiques différents appliqué à une personne de 100Kg avec ce modèle de raideur. Discuter les résultats !!!
7. Déterminer les valeurs numériques des raideurs k_2 valables pour des allongements de 100% à 200%. En les comparant aux valeurs de k_1, discuter de la variation de raideur de l'élastique avec l'allongement.
8. Sans effectuer aucun calcul, conclure sur la possibilité d'effectuer un saut avec une corde de 40 m permettant d'atteindre les 100 Km/h.

TD Dynamique du Point
Saut à l'Elastique
CORRECTION

Question 1 : Déterminer l'équation du mouvement et la durée de la chute libre.

Equation du mouvement :

Pendant la phase de chute libre, la personne n'est soumise qu'à son poids, le théorème de la résultante dynamique appliqué à cette personne donne donc :

$M\vec{a} = M\vec{g}$, soit en projection sur $\vec{z}$: $\dfrac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}.\vec{z} = g$. D'où l'équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{\ddot{z} = g}$$

Durée de la chute libre :

Intégrons deux fois l'équation différentielle du mouvement :

Une première fois, on obtient : $\dot{z} = gt + V_0$

Une seconde fois, on obtient : $z = \dfrac{1}{2}gt^2 + V_0 t + z_0$

Déterminons les constantes d'intégration V_0 et z_0 avec les conditions initiales. Or à t = 0s :

La personne se jette sans vitesse initiale $V(0) = \dot{z}(0) = 0$, d'où $V_0 = 0$

La personne se jette depuis le pont $(z = 0)$. Donc $z(t = 0) = 0 = z_0$.

L'équation de la vitesse et donc : $\boxed{V(t) = \dot{z}(t) = gt}$

L'équation de la position est donc : $\boxed{z(t) = \dfrac{1}{2}gt^2}$

La durée de la chute libre correspond à l'instant où la position atteint la longueur de l'élastique L.

On a donc comme durée t_{cl} : $z(t_{cl}) = \dfrac{1}{2}gt_{cl}^2 = L$

Soit : $\boxed{t_{cl} = \sqrt{\dfrac{2L}{g}}}$

Question 2 : Déterminer l'expression analytique de la vitesse atteinte à la fin de cette phase de la chute libre.

Il suffit de reprendre l'équation de la vitesse trouvée précédemment et de calculer cette vitesse à l'instant t_{cl}. On obtient donc :

$V(t_{cl}) = gt_{cl}$ soit : $V(t_{cl}) = g\sqrt{\frac{2L}{g}}$ ou bien encore :

$$\boxed{V(t_{cl}) = \sqrt{2Lg}}$$

Question 3 : Déterminer les raideurs de chacun des élastiques utilisables.

De 0 à 100% d'allongement, soit pour une distance parcourue de L (début de la décélération) à $2L$ (100% d'allongement), les valeurs des raideurs sont notées k_1, avec les valeurs littérales suivantes pour chaques sortes d'élastiques :
Pour une tension de X Kg soit 9,81X N, on a un allongement de 100% soit un allongement qui correspond à la longueur de l'élastique $\Delta L = L$. Or $9{,}81X = k_1 \Delta L$, d'où $k_1 = \frac{9{,}81X}{\Delta L} = \frac{9{,}81X}{L}$.

On a donc les raideurs suivantes en fonction des longueurs des élastiques

$$\boxed{k_{1XS} = \frac{100g}{L} = \frac{981}{L}}$$

$$\boxed{k_{1S} = \frac{160g}{L} = \frac{1569{,}6}{L}}$$

$$\boxed{k_{1M} = \frac{200g}{L} = \frac{1962}{L}}$$

$$\boxed{k_{1L} = \frac{250g}{L} = \frac{2452{,}5}{L}}$$

Question 4 : Déterminer l'équation du mouvement pendant la phase de décélération de 0 à 100% d'allongement de l'élastique.

Pendant la phase de décélération, la personne est soumise à son poids et à la résistance exercée par l'élastique. L'application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{z}$, s'écrit donc :

$M\ddot{z} = Mg - k_1 z$

Il nous faut donc trouver la solution de cette équation différentielle :

$M\ddot{z} + k_1 z = Mg$

- ➪ La solution particulière (de même forme que le second membre, c'est-à-dire constante) vaut $z_{part}(t) = \frac{Mg}{k_1}$

➪ La solution générale sans second membre (régime transitoire) est la solution de l'équation : $\frac{M}{k_1}\ddot{z}+z=0$, c'est-à-dire sinusoïdale, de la forme :

$$z_{géné}(t)=l\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)+m\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)$$

La solution est donc de la forme : $z(t)=\frac{Mg}{k_1}+l\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)+m\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)$ avec les deux constantes d'intégration l et m à déterminer en fonction des conditions initiales :

$$\begin{cases} z(0)=0 \\ V(0)=\dot{z}(0)=V(t_{cl})=\sqrt{2Lg} \end{cases}$$

L'exploitation des conditions initiales donne les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{Mg}{k_1}+l=0 \\ -l\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}\right)\cancel{\left[\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)\right]}+m\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}\right)\underbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}0\right)}_{1}=\sqrt{2Lg} \end{cases}, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} l=-\frac{Mg}{k_1} \\ m=\sqrt{\frac{2LgM}{k_1}} \end{cases}.$$

L'équation du mouvement pendant la phase de décélération de 0 à 100% d'allongement est donc :

$$\boxed{z(t)=\frac{Mg}{k_1}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)\right]+\sqrt{\frac{2LgM}{k_1}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)}$$

Question 5 : En déduire la distance parcourue pendant cette phase de décélération.

La distance parcourue correspond à la distance parcourue à l'instant où la vitesse s'annule (avant de s'inverser : remontée).

On cherche donc d'abord l'instant où la vitesse s'annule :

$$\dot{z}(t)=g\sqrt{\frac{M}{k_1}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)+\sqrt{2Lg}\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)=0$$

$$\tan\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)=-\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}, \text{ soit } t_k=\sqrt{\frac{M}{k_1}}\left[kp-\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right]$$

$k=0$ donne une valeur négative ce qui n'est pas cohérent, donc la valeur qui nous intéresse est celle pour $k=1$, soit : $\boxed{t_1=\sqrt{\frac{M}{k_1}}\left[p-\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right]}$

La distance parcourue pendant cette phase de décélération vaut donc :

$$z(t_1)=\frac{Mg}{k_1}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t_1\right)\right]+\sqrt{\frac{2LgM}{k_1}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t_1\right)$$

Or comme $\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t_1\right)=\cos\left[p-\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right]=-\cos\left(\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right)$ et

$$\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t_1\right)=\sin\left[p-\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right]=\sin\left(\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right)$$

On a :

$$z(t_1)=\frac{Mg}{k_1}\left[1+\cos\left(\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right)\right]+\sqrt{\frac{2LgM}{k_1}}\sin\left(\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right)$$

Question 6 : La personne souhaite atteindre la vitesse de chute libre de 100 Km.h^{-1}, déterminer la longueur minimale de corde à lui donner..

Il suffit d'inverser la relation trouvée à la question 2 : $V(t_d)=\sqrt{2Lg}$. Soit :

$100\times\frac{1000}{3600}=\sqrt{2Lg}$, d'où $\boxed{L=\frac{1}{2g}\left(\frac{100}{3,6}\right)^2=39,33\text{ m}}$

On prendra donc une corde de 40 m

Question 7 : Déterminer les distances totales de chute pour les quatre types d'élastiques différents appliqué à une personne de 100Kg, avec ce modèle de raideur.

La distance parcourue correspond à la distance parcourue à l'instant où la vitesse s'annule (avant de s'inverser : remontée).

On cherche donc d'abord l'instant où la vitesse s'annule :

$$\dot{z}(t)=g\sqrt{\frac{M}{k_1}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)+\sqrt{2Lg}\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)=0$$

$\tan\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t\right)=-\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}$, soit $t_k=\sqrt{\frac{M}{k_1}}\left[kp-\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right]$

$k=0$ donne une valeur négative ce qui n'est pas cohérent, donc la valeur qui nous intéresse est celle pour $k=1$, soit : $\boxed{t_1=\sqrt{\frac{M}{k_1}}\left[p-\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right]}$

La distance parcourue pendant cette phase de décélération vaut donc :

$$z(t_1)=\frac{Mg}{k_1}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t_1\right)\right]+\sqrt{\frac{2LgM}{k_1}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t_1\right)$$

Or comme $\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t_1\right)=\cos\left[p-\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right]=-\cos\left(\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right)$ et

$\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{M}}t_1\right)=\sin\left[p-\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right]=\sin\left(\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right)$

On a :

$$\boxed{z(t_1)=\frac{Mg}{k_1}\left[1+\cos\left(\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right)\right]+\sqrt{\frac{2LgM}{k_1}}\sin\left(\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]\right)}$$

☹ Pour l'élastique **XS**, on obtient : $k_{1XS}=\frac{981}{40}=24{,}52\ \mathrm{N.m^{-1}}$:

Soit : $\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]=54{,}73°$, d'où

$z(t_1)=\frac{981}{24{,}52}[1+\cos 54{,}73]+\sqrt{\frac{80.981}{24{,}52}}\sin 54{,}73=109{,}3\ \mathrm{m}$. Soit un allongement de l'élastique de $\frac{109{,}3}{40}=273\%$ hors de la validité du modèle (allongement de 100%) et par ailleurs, entraînant une chute théorique de 40+108,5=148,5 m bien supérieure à la hauteur du pont (103 m) AIE AIE AIE

☹ Pour l'élastique **S**, on obtient : $k_{1S}=39{,}24\ \mathrm{N.m^{-1}}$

Soit : $\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right]=60{,}79°$, d'où

$z(t_1)=\underbrace{\frac{981}{39{,}24}[1+\cos 60{,}79]}_{37{,}2}+\underbrace{\sqrt{\frac{80.981}{39{,}24}}\sin 60{,}79}_{39{,}03}=76{,}2\ \mathrm{m}$. Soit un allongement de l'élastique de $\frac{76{,}2}{40}=190\%$ hors de la validité du modèle (allongement de 100%) et par ailleurs, entraînant une chute théorique de 40+76,2=116,2 m supérieure à la hauteur du pont (103 m) AIE AIE AIE

☹ Pour l'élastique **M**, on obtient : $k_{1M} = \frac{981}{40} = 49{,}05 \text{ N.m}^{-1}$

Soit : $\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right] = \tan^{-1}(2) = 63{,}43°$, d'où

$z(t_1) = \underbrace{\frac{981}{49{,}05}[1+\cos 63{,}43]}_{28{,}95} + \underbrace{\sqrt{\frac{80.981}{49{,}05}}\sin 63{,}43}_{35{,}77} = 64{,}7 \text{ m}$. Soit un allongement de l'élastique de $\frac{64{,}7}{40} = 162\%$ hors de la validité du modèle (allongement de 100%) et par ailleurs, entraînant une chute théorique de $40+64{,}7=104{,}7$ m légèrement supérieure à la hauteur du pont (103 m) AIE AIE AIE

☹ Pour l'élastique **L**, on obtient : $k_{1L} = \frac{981}{40} = 61{,}31 \text{ N.m}^{-1}$

Soit : $\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2k_1L}{gM}}\right] = \tan^{-1}\left[\sqrt{5}\right] = 65{,}9°$,

d'où $z(t_1) = \underbrace{\frac{981}{61{,}31}[1+\cos 65{,}9]}_{22{,}53} + \underbrace{\sqrt{\frac{80.981}{61{,}31}}\sin 65{,}9}_{32{,}66} = 55{,}2 \text{ m}$. Soit un allongement de l'élastique de $\frac{55{,}2}{40} = 138\%$ hors de la validité du modèle (allongement de 100%) et par ailleurs, entraînant une chute théorique de $40+55{,}2=95{,}2$ m inférieure à la hauteur du pont (103 m), mais reste à connaître l'influence de la variation de raideur au-delà des 100% d'allongement.

Question 8 : Déterminer les valeurs numériques des raideurs k_2 valables pour des allongements de 100% à 200%.

De 100 à 200% d'allongement, soit pour une distance parcourue de L (100% d'allongement) à $3L$ (200% d'allongement), on obtient:
Pour une tension de X Kg soit 9,81X N, on a un allongement de 200% soit un allongement qui correspond à la longueur de l'élastique $\Delta L = 2L$. Or $9{,}81X = k_2\Delta L$, d'où $k_2 = \frac{9{,}81X}{2L}$. On a donc les raideurs suivantes pour des élastiques de 40 m.

$$\boxed{k_{2XS} = \frac{160g}{2L} = 19{,}62 \text{ N.m}^{-1}}$$

$$k_{2S} = \frac{255g}{2L} = 31{,}27 \text{ N.m}^{-1}$$

$$k_{2M} = \frac{325g}{2L} = 39{,}85 \text{ N.m}^{-1}$$

$$k_{2L} = \frac{400g}{2L} = 49{,}05 \text{ N.m}^{-1}$$

Conclusion :

En fait puisque ces valeurs sont inférieures à celle trouvées pour des allongements inférieurs à 100%, les élastiques «perdent » de la raideurs en s'allongeant.

Question 9 : Sans effectuer aucun calcul, conclure sur la possibilité d'effectuer un saut avec une corde de 40 m permettant d'atteindre les 100 Km/ h.

Puisque l'on constate que l'élastique **L** (le plus raide) présente pour des allongements inférieurs à 200% une raideur k_{2L} égale à celle de l'élastique **M** pour des allongements inférieurs à 100%, les résultats seront ceux obtenus précédemment avec l'élastique **M**, soit :

- 😐 Un allongement de 162% cohérent avec le modèle (résultats valides)
- 😐 Une distance parcourue totale de 104,7m trop grande (de peu) pour ne pas se « fracasser » le corps.

En théorie, il ne vaut donc mieux pas « sauter » dans de telles conditions !!!

En pratique, nous n'avons pas tenu compte de la résistance de l'air, difficilement quantifiable car dépendant de la position du sauteur dans l'espace. Cette action mécanique diminuant la distance parcourue lors du saut, la longueur trouvée est surévaluée, ce qui est un élément de sécurité, à condition de la respecter !!!

En pratique, il suffit de « lâcher » un leste inerte de poids supérieur au sauteur pour vérifier qu'il n'y a aucun risque

Dans notre cas, il faut raccourcir l'élastique de 2 m ce qui donnera une distance parcourue inférieure à 104,7 -2 = 102,7 m puisque la vitesse atteinte en fin de chute libre sera aussi inférieure à celle atteinte avec un élastique **L** de 40 m.