ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE–3

Pour $x > -1$ on définie la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orhonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE I

1) Etudier la continuité et la dérivablité de f sur $]-1, +\infty[$ et calculer f'

2) On note pour $x > -1$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$

a) Etudier le signe de $g(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f (on n'oubliera pas de déterminer les valeurs limites aux bornes).

3) a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 et étudier la position de C par rapport à cette tangente (on pourra être amené à étudier le signe de $x^2(\frac{1}{2} + f'(x))$.

b) Tracer la courbe C.

PARTIE II

1) Eudier la fonction k définie par $k(x) = f(x) - x$ et tracer sa courbe représentative. Montrer qu'il existe un unique réel noté ℓ appartenant à $]0; 1[$ tel que $f(\ell) = \ell$

2) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0; 1[$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$

d) Ecrire un programme en langage Pascal qui détermine une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

PARTIE III

1) Montrer que : $\forall (a, b) \in]-1, +\infty[^2,\ (a < b) \Longrightarrow (b-a)f(b) < \displaystyle\int_a^b f(x)dx < (b-a)f(a)$.

2) En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ en utilisant la subdivision $(0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1)$ de l'intervalle $[0; 1]$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq \dfrac{1}{1+x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Qu'en déduit-on pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$?

4) a) Montrer que : $\forall x \in \left]-1, \dfrac{1}{2}\right],\ 0 < f(x) \leq -2\ln(1+x)$.

b) Montrer que : $\forall x \in \left]-1, \dfrac{1}{2}\right], 0 \leq \displaystyle\int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \leq 1 + \ln 2$.

5) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(x)dx$.

Montrer que la suite (v_n) est convergente.

6) Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)dt$ et donner une expression de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 3

CORRIGE–3 :

PARTIE I

1)

Notons $D =]-1, +\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (c'est du cours), donc f est continue au point 0 ; par ailleurs sur $D \setminus \{0\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. La fonction f est continue sur D.

• De même la fonction f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

<u>Etude au point 0</u> . Utilisons le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\ &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) - x}{x^2}\\ &= -\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable au point $x = 0$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. On conclut que la fonction f est dérivable sur D.

Pour $x \in D - \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}(\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x))$ (on a dérivé le produit $\ln(1+x) \times \dfrac{1}{x}$).

2–a)

$\forall x \in D,\ g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = -\dfrac{x}{(1+x)^2}$ et on a le tableau suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	

La fonction admet un maximum absolu au point $x = 0$ qui vaut 0 ; donc $\forall x \in D,\ g(x) \leq 0$

2–b)

Il est clair que $\forall x \in D \setminus \{0\},\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, ce qui implique $\forall x \in D,\ f'(x) \leq 0$: en effet, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ et $\forall x \in D \setminus \{0\}, f'(x)$ est du signe de $g(x)$ et $g(x) < 0$ sauf en 0. On a donc le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (car $1+x \underset{(+\infty)}{\sim} x$), donc par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ et finalement $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$.

3–a)

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point $A(0,1)$ est $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

- Position de C par rapport à $\mathcal{T}$: il s'agit d'évaluer le signe de $d(x) = f(x) - y = f(x) + \frac{1}{2}x - 1$ pour tout $x \in D - \{0\}$

$$\forall x \in D - \{0\},\ d'(x) = f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)\right) + \frac{1}{2}$$

$$\forall x \in D - \{0\},\ x^2 d'(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} = g(x) + \frac{x^2}{2}$$

On remarque que cette dernière expression est valable pour $x = 0$, donc

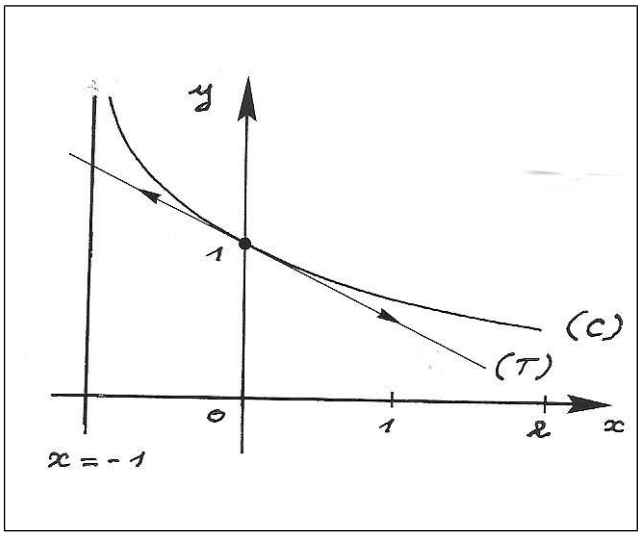
$$\forall x \in D,\ x^2 d'(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) + \frac{x^2}{2} = g(x) + \frac{x^2}{2}$$

Dérivons cette dernière expression, il vient $-\dfrac{x}{(x+1)^2} + x = \dfrac{x((x+1)^2 - 1)}{(1+x)^2} = \dfrac{x^2(x+2)}{(1+x)^2}$; quantité manifestement positive, d'où les tableaux de variations et de signe suivants : on remarquera que $d(0) = 0$ et $d'(0) = f'(0) + \frac{1}{2} = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$x^2 d'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
d		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$d(x)$		$+$	0	$+$	

3–b))

Courbe C :



PARTIE II

1)

Posons $k(x) = f(x) - x$. La fonction k est dérivable sur D et

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\begin{aligned}\forall x \in D,\ k'(x) &= f'(x) - 1\\ k'(x) &= \frac{1}{x^2}g(x) - 1 = \frac{1}{x^2}(g(x) - x^2) \quad \forall x \in D \setminus \{0\} \quad \text{et}\\ k'(0) &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Posons pour $x \in D$, $h(x) = g(x) - x^2$; $h'(x) = g'(x) - 2x = -\frac{x}{(1+x)^2}\underbrace{(1 + 2(1+x)^2)}_{>0}$. On a les tableaux de variations suivants :

x	-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0		$-$		
h		$\nearrow$	0		$\searrow$		
$k'((x)$		$-$	$-\frac{3}{2}$		$-$		
k	$+\infty$	$\searrow$	1		$\searrow$		$-\infty$

Les limites aux bornes

$\lim\limits_{x \to -1^+}(f(x) - x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(k(x) = -\infty$

La fonction k est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, c'est donc une bijection de $]-1, +\infty[$ sur son image qui est $\mathbb{R}$. Or 0 appartient à $\mathbb{R}$, donc l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution notée ℓ .

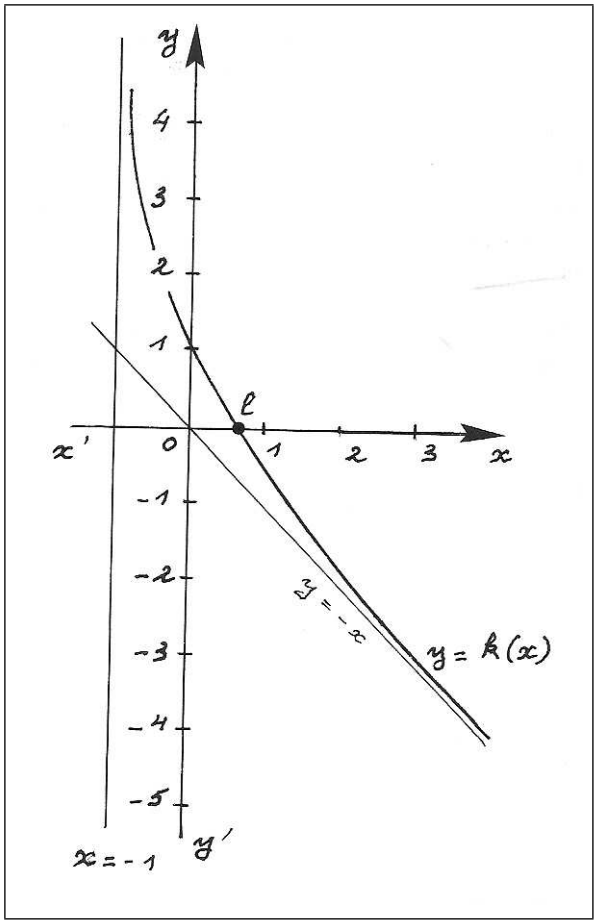
$k(0) = 1 > 0$ et $k(1) = \ln 2 - 1 < 0$; ℓ appartient à $]0, 1[$ (en effet ℓ n'est égale ni à 0 ni à 1 d'après les valeurs de $k(0)$ et de $k(1)$) .

Courbe représentative de k :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = -1$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ sans problème. Il y a une direction asymptotique $y = -x$; $\lim\limits_{x \to +\infty}(k(x) + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc la courbe représentative de k possède en $+\infty$ une asymptote : la droite d'équation $y = -x$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021



2−a)

La fonction f est continue strictement décroissante sur $[0,1]$, donc $f(]0,1[) =]\ln 2, 1[\subset]0,1[$. L'intervalle $]0,1[$ est stable par f , $u_0 \in]0,1[$, donc une recurrence immédiate donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1[$.

2−b)

Sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction est continue, dérivable et f' est continue , on peut donc appliquer l'inégalité des acccroissements finis entre u_n et ℓ (qui sont tous les deux dans $[0,1]$). D'après la question **I−3)**, on sait que $\frac{1}{2} + f'(x) \geq 0$, donc $f'(x) \geq -\frac{1}{2}$; d'autre part $f'(x) \leq 0$, donc : $\forall x \in [0,1],\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$, ce qui implique : $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

L'inégalité des accroissements finis donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$, soit puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|}$$

2−c)

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Initialisation : La propriété est satisfaite pour $n = 0$ puisque ℓ et u_0 étant dans $[0,1]$, $|u_0 - \ell| \leq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Hérédité : supposons la propriété satisfaite pour un $n \in \mathbb{N}$, on a donc $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$; multiplions cette inégalité par $\frac{1}{2} > 0$, il vient : $\frac{1}{2}|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or, d'après le **a)**, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$, donc $|u_{n+1} - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

La propriété est héréditaire et par principe de récurrence elle est satisfaite pour tous les entiers naturels.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ puisque c'est la limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.

Par le théorème d'encadrement, l'inégalité $0 \leq |u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ implique $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - \ell| = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

2−d)

On peut procéder ainsi :

- Si on a trouvé un entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq 0.001$, alors ce nombre u_{n_0} est une valeur approchée de ℓ à 0.001 près. Pour cela il **suffit** que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \leq 0.001$. Résolvons l'inéquation précédente ; elle équivaut , par croissance du logarithme à $-n_0 \ln 2 \leq \ln 0.001 = -3\ln 10$, soit $n_0 \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2}$, ce qui donne $n_0 \geq 10$. Il suffit de calculer u_{10}

- program calcul1 ;

```
var u : real ;
    n : integer ;
BEGIN
u := 1/2 ;
for n :=1 to 10 do u := ln(1+u)/u ;
writeln(' une valeur approchee de ℓ est ', u:1:3) ;
END.
```

On trouve $\ell \approx 0.747$.

PARTIE III

1)

Sur $[a,b]$, la fonction f est décroissante, donc $\forall x \in [a,b],\ f(b) \leq f(x) \leq f(a)$. On intègre cet encadrement entre a et b (les bornes sont dans l'ordre croissant), on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(b)dx &\leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(a)dx \quad \text{, soit}\\
[xf(b)]_a^b &\leq \int_a^b f(x)dx \leq [xf(a)]_a^b \quad \text{, soit}\\
(b-a)f(b) &\leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(a)
\end{aligned}$$

Remarque : on obtient des inégalités larges ; elles sont en fait strictes, en effet

la fonction $x \longmapsto f(x) - f(b)$ est continue sur $[a,b]$, positive et non identiquement nulle puisque la fonction f est **strictement** décroissante ; il en résulte que $\int_a^b (f(x) - f(b))dx > 0$; par linéarité de l'intégration, on a $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b f(b)dx$, soit $\int_a^b f(x)dx > (b-a)f(b)$. On procède de même avec l'autre inégalité. Conclusion :

$$\boxed{(b-a)f(b) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)f(a)}$$

2)

Posons pour $k \in [\![0,5]\!]$, $a_k = \frac{k}{5}$; d'après la question précédente,

$$\frac{1}{5}f(a_{k+1}) < \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx < \frac{1}{5}f(a_k)$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Sommons ces inégalités pour k variant de 0 à 4 et pour les intégrales utilisons la relation de Chasles. On obtient

$$\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_{k+1}) < \sum_{k=0}^{4}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx < \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_k), \text{ soit}$$

$$\underbrace{\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_{k+1})}_{S_1} < \int_0^1 f(x)dx < \underbrace{\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} f(a_k)}_{S_2}$$

$f(a_j) = \dfrac{\ln(1+\frac{j}{5})}{\frac{j}{5}} = 5\dfrac{\ln(1+\frac{j}{5})}{j}$ pour $j \neq 0$ et $f(a_0) = f(0) = 1$.

On trouve $\frac{1}{5}S_1 \approx 0,792$ et $\frac{1}{5}S_2 \approx 0.854$

$$\boxed{0.792 < \int_0^1 f(x)dx < 0.854}$$

3)

- Posons $\forall x \in D \setminus \{0\} u(x) = \dfrac{1}{1+x} - f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x}g(x)$. D'après la question **II−2)**, $g(x) \leq 0$, donc $u(x) \leq 0$ pour $x > 0$ et pour $u(0) = 1 - 1 = 0$: on conclut

$$\forall x \geq 0,\ u(x) \leq 0, \quad \text{donc, } \frac{1}{1+x} \leq f(x).$$

- Pour $x \geq 0$, $\forall t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{1+t} \leq f(t)$, on intègre cette inégalité entre 0 et x :

$\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x f(t)dt$, donc $[\ln(1+t)]_0^x \leq \displaystyle\int_0^x f(t)dt$:

$$\forall x \geq 0, \int_0^x f(t)dt \geq \ln(1+x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = +\infty$$

On conlut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt \notin \mathbb{R}$

4−a)

Pour $-1 < x \leq -\dfrac{1}{2}$, $\ln(1+x) < 0$ car $0 < 1+x < 1$

Pour $-1 < x \leq -\dfrac{1}{2}$, $-2 \leq \dfrac{1}{x} < -1$ **(inégalités entre nombre strictement négatifs, les inverses sont rangés en ordre inverse)**, donc on a : $\forall x \in \,]-1, -\frac{1}{2}]$, $-\ln(1+x) > 0$ et $1 < -\dfrac{1}{x} \leq 2$. On multiplie ce dernier encadrement par $-\ln(1+x)$ et on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \,]-1, -\tfrac{1}{2}],\ 0 < -\ln(1+x) < \frac{\ln(1+x)}{x} \leq -2\ln(1+x), \text{ donc } 0 < f(x) \leq -2\ln(1+x)}$$

4−b)

Partons de l'encadrement $0 < f(t) \leq -2\ln(1+t)$ pour $t \in \,]-1, -\frac{1}{2}]$ et intégrons entre x et $-\dfrac{1}{2}$ pour $x \in \,]-1, -\frac{1}{2}]$, il vient $0 \leq \displaystyle\int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \leq -2\int_x^{-\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt$ **(1)**

car les bornes sont dans l'ordre croissant.

$$\int_x^{-\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt = [(1+t)\ln(1+t) - t]_x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - (1+x)\ln(1+x) + x$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

L'encadrement **(1)** donne alors :

$$0 \leq \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \leq 2(1+x)\ln(1+x) - 2x - \ln(\frac{1}{2}) - 1$$

Or $2(1+x)\ln(1+x) - 2x - \ln(\frac{1}{2}) - 1 \quad 2(1+x)(\ln(1+x)-1) + 2 + \ln 2 - 1$

$$\text{Donc } 0 \leq \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt = 1 + \ln 2 + 2\underbrace{(1+x)}_{>0}\underbrace{(\ln(1+x)-1)}_{<0}$$

$$\boxed{\text{Donc } 0 \leq \int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt \leq 1 + \ln 2}$$

5)

Remarquons que la suite (u_n) est bien définie car $n \geq 1 \Longrightarrow -1 < -1 + \dfrac{1}{n} < 0$; l'intégrale existe puisque sur $[-1+\frac{1}{n}, 0]$, la fonction f est continue.

Par relation de Chasles, $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n+1}}^{-1+\frac{1}{n}} f(t)dt$; on a $-1 + \dfrac{1}{n+1} < -1 + \dfrac{1}{n}$ et $f > 0$ sur $[-1+\frac{1}{n+1}, -1+\frac{1}{n}]$, donc $\boxed{v_{n+1} - v_n > 0 : \text{la suite } (v_n) \text{ croît}}$

D'autre part, $v_n = \displaystyle\int_{-1+\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt < 1 + \ln 2 + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$ d'après la question précédente puisque $-1 + \dfrac{1}{n} \in]-1, -\dfrac{1}{2}]$ pour $n \geq 2$.

Ceci prouve que la suite (v_n) est majorée par le réel $1 + \ln 2 + \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$ à partir de $n = 2$.

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est croissante, majorée, donc convergente}}$$

6)

$\forall x \in]-1, -\frac{1}{2}]$, $\displaystyle\int_x^{-\frac{1}{2}} f(t)dt = \int_x^{-\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+t)}{t}dt$.

On sait que $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{(-1^+)}{\sim} -\ln(1+t)$ puisque $t \underset{(-1^+)}{\sim} -1$.

- $$\lim_{x\to -1^+} \int_x^{-\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt = \lim_{x\to -1^+} \Big(2(1+x)\ln(1+x) - 2x + \ln 2 - 1\Big)$$
  calcul fait à la question **III−3−b)**
  $$= 1 + \ln 2 \quad \text{car } \lim_{u\to 0^+} u\ln u = 0$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \int_x^{\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt \in \mathbb{R}$, donc **l' intégrale** $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \ln(1+t)dt$ **est convergente.**

- Par la règle d'équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$ est convergente. Sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, 0]$ la fonction f est continue, donc $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$ existe et on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-1}^{0} f(t)dt \text{ est convergente}}$$

- On peut donc écrire, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-1+\frac{1}{n}) = -1^+$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021