



ANALYSE

ENONCE DU PROBLEME

ENONCE-7

On compare dans cet exercice les intérêts rapportés par une somme donnée placée de différentes façons.

1) UNE QUESTION TECHNIQUE

Dans toute cette question on désigne par  $x$  un nombre réel positif donné.

a) On considère la fonction définie pour tout réel  $t > 0$  par :

$$f(t) = t \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right)$$

Calculer  $f'(t)$  et  $f''(t)$ . Quel est le signe de  $f''(t)$  ?

Calculer la limite de  $f'(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Quel est le signe de  $f'(t)$  ?

En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

b) On considère la suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Déduire de l'étude de  $f$  le sens de variation des suites  $(\ln(u_n))$  et  $(u_n)$ .

Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2) TAUX D'INTERET ANNUEL ET TAUX D'INTERET SUR UNE FRACTION DE L'ANNEE

On considère une somme  $S_0$  que l'on place de différentes façons.

a) On place  $S_0$  durant une année au taux d'intérêt annuel  $r > 0$ . De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

b) On subdivise l'année en  $n$  périodes égales, et on place  $S_0$  durant une année à un taux d'intérêt égal à  $\frac{r}{n}$  pour chacune des périodes.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

Déterminer la limite de celle-ci lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Comparer les deux placements des questions a) et b) et conclure.

c) On subdivise l'année en  $n$  périodes égales et on place  $S_0$  durant une année à un taux d'intérêt égal à  $r_n$  pour chacune des périodes (où  $r_n$  est donc indépendant de la période considérée).

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

Exprimer  $r_n$  en fonction de  $r$  et de  $n$  pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux annuel  $r$  ou à l'année divisée en  $n$  périodes égales au taux d'intérêt par période  $r_n$ .

A titre d'exemple, si  $r = 12\%$ , le taux mensuel est égal à  $0.95\%$ .

3) TAUX D'INTERET ANNUEL ET TAUX D'INTERET INSTANTANE CONSTANT

On considère une somme  $S_0$  que l'on place au taux d'intérêt instantané  $i > 0$ , ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant  $t \geq 0$  de la somme  $S(t)$  (avec donc  $S(0) = S_0$ ), alors on dispose à l'instant  $t + h \geq 0$  de la somme  $S(t + h)$  où :

$$S(t+h) = S(t)(1 + ih + h\varepsilon(h)) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

- a) Prouver que  $S$  est dérivable en  $t$  et exprimer  $S'(t)$  en fonction de  $S(t)$  et  $i$ .  
 b) Etudier la fonction  $t \mapsto \exp(-it)S(t)$ , puis en déduire l'expression de  $S(t)$  en fonction de  $S_0, t$  et  $i$ .  
 c) Quelle est la somme  $S(t)$  obtenue à l'issue d'une année de placement ?

Exprimer  $i$  en fonction de  $r$  pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année à taux constant annuel  $r$  ou au taux instantané  $i$  ?

A titre d'exemple, si  $r = 12\%$ , le taux instantané est égal à  $11.33\%$ .

#### 4) PLACEMENTS A TAUX INSTANTANE VARIABLE

On considère une somme  $S_0$  que l'on place au taux instantané  $i(t) \geq 0$ , ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant  $t \geq 0$  de la somme  $S(t)$ , alors on dispose à l'instant  $t+h \geq 0$  de la somme  $S(t+h)$  où :

$$S(t+h) = S(t)(1 + i(t)h + h\varepsilon(h)) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

On suppose la fonction  $t \mapsto i(t)$  continue sur  $\mathbb{R}^+$  et l'on note  $I$  sa primitive s'annulant en 0.

- a) Prouver que  $S$  est dérivable et exprimer  $S'(t)$  en fonction de  $S(t)$  et de  $i(t)$ .  
 b) Etudier la fonction  $t \mapsto \exp(-I(t))S(t)$ , puis en déduire l'expression de  $S(t)$  en fonction de  $S_0$  et de  $I(t)$ .  
 c) En déduire la somme  $S(n)$  obtenue à l'issue de  $n$  années de placements dans les quatre cas suivants ( $i$  et  $a$  sont des nombres réels positifs donnés).

- 1)  $i(t) = i$                                    taux constant
- 2)  $i(t) = i(1 + a \sin t)$            fluctuations autour d'un taux constant
- 3)  $i(t) = i(1 + ae^{-t})$            taux tendant vers  $i$  sans osciller
- 4)  $i(t) = i(1 + ae^{-t} \sin t)$    taux tendant vers  $i$  en oscillant

## CORRIGE DU PROBLEME NUMERO 7

## CORRIGE-7 :

## EXERCICE-I

## QUESTION-1

1-a)

$$\begin{aligned} \forall t > 0, f'(t) &= \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) + t \frac{-\frac{x}{t^2}}{1 + \frac{x}{t}} \\ &= \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{\frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}. \end{aligned}$$

$$\forall t > 0, f'(t) = \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) - \frac{x}{x+t}.$$

$$\begin{aligned} \forall t > 0, f''(t) &= \frac{-\frac{x}{t^2}}{1 + \frac{x}{t}} + \frac{x}{(x+t)^2} \\ &= -\frac{x}{t(x+t)} + \frac{x}{(x+t)^2} \\ &= \frac{-x(x+t) + xt}{t(x+t)^2}. \end{aligned}$$

$$\forall t > 0, f''(t) = \frac{-x^2}{t(x+t)^2}. \quad ; f''(t) \leq 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right) = 0, \text{ car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right) = 1 ; \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+t} = 0 ; \text{ donc}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0.$$

$f''(t) \leq 0$ , donc  $f'$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0$ , donc

$$\forall t > 0, f'(t) \geq 0 : f \text{ est croissante sur } ]0, +\infty[.$$

1-b)

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = f(n).$

$f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ , donc la suite  $(\ln(u_n))$  est croissante. La fonction exponentielle est croissante,  $u_n = \exp(\ln(u_n))$ , donc **par composition de fonctions croissantes**, la suite  $(u_n)$  est croissante.

•

$$\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} = x, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0, \text{ donc } \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n}.$$

**Remarque** : cette équivalence est justifiée car  $\frac{x}{n} \neq 0$  !

On en **déduit** que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = x$ , donc **par composition des limites (ou par continuité de l'exponentielle)**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^x.$$

**QUESTION-2****2-a)**

Ayant placé la somme  $S_0$ , au bout d'un an, on aura gagné  $S_0 \times r$  ; on disposera donc de  $S_0 + S_0 \times r$ , soit  $S_0(1+r)$ .

**2-b)**

Au bout de la première période, on dispose donc de  $S_1 = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)$ .

Au bout de la deuxième période, on dispose de  $S_2 = S_1 \left(1 + \frac{r}{n}\right) = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$ .

**Raisonnons par récurrence.**

Soit  $H_k$  la propriété : " au bout de  $k$  périodes, on dispose de la somme  $S_k = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^k$  . "

**Initialisation :**  $H_1$  et  $H_2$  sont satisfaites (d'ailleurs,  $H_0$  est également satisfaite).

**Hérédité :** Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$ , /  $S_k = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^k$ . Au bout de la période suivante - la  $k+1$  ème - on disposera de la somme  $S_{k+1} = S_k \left(1 + \frac{r}{n}\right) = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{k+1}$ .

La propriété  $H_{k+1}$  est satisfaite, elle est héréditaire.

**D'après le principe du raisonnement par récurrence, on conclut que**

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_k = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^k .$$

En particulier au bout d'un an, donc au bout de  $n$  périodes, on disposera de  $S_n = S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ .

D'après la question 1 b), on conclut que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = S_0 e^r$ .

On a vu que la suite  $(u_n)$  était croissante, donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_1 = 1+r \leq \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ .

$$\text{Or } S_0 > 0 \text{ donc, } S_0(1+r) \leq S_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n .$$

Le placement du b) rapporte plus que celui du a).

**2-c)**

Le raisonnement est identique à celui effectué au b), avec  $r_n$  au lieu de  $\frac{r}{n}$ .

Au bout d'un an de placement on dispose de  $S_0(1+r_n)^n$ .

On cherche  $r_n$  pour que  $S_0(1+r_n)^n = S_0(1+r)$ . Ce qui équivaut à  $(1+r_n)^n = 1+r$ , puisque  $S_0 \neq 0$ . On peut élever à la puissance  $\frac{1}{n}$ , on obtient  $1+r_n = (1+r)^{\frac{1}{n}}$  et finalement

$$r_n = (1+r)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

**QUESTION-3****3-a)**

page 4

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t)(ih + h\varepsilon(h))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} S(t)(i + \varepsilon(h)) = iS(t).\end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, S$  est dérivable au point  $t$  et  $S'(t) = iS(t)$ .

**3-b)** \_\_\_\_\_

Posons, pour  $t \geq 0$ ,  $g(t) = e^{-it}S(t)$ .

$$\begin{aligned}\forall t \geq 0, g'(t) &= -ie^{-it}S(t) + e^{-it}S'(t) \\ &= -ie^{-it}S(t) + ie^{-it}S(t) \quad \text{d'après a)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$g$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) = e^{-it}S(t) = k$ .

Pour  $t = 0$ ,  $g(0) = S(0) = S_0 = k$ , donc  $\forall t \geq 0, e^{-it}S(t) = S_0$ .

$\forall t \in \mathbb{R}_+, S(t) = S_0e^{it}$ .

**3-c)** \_\_\_\_\_

$S(1) = S_0e^i$ .

On cherche  $i$  pour que  $S_0e^i = S_0(1+r)$ , c'est-à-dire :  $e^i = 1+r$  car  $S_0 \neq 0$ . Ce qui donne :

$i = \ln(1+r)$ .

#### QUESTION-4

\_\_\_\_\_

**4-a)**

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (S(t)i(t) + \varepsilon(h)) \\ &= S(t)i(t).\end{aligned}$$

$S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\forall t \geq 0, S'(t) = S(t)i(t)$ .

**4-b)** \_\_\_\_\_

Posons :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi(t) = e^{-I(t)}S(t)$ .

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi'(t) &= -I'(t)e^{-I(t)}S(t) + e^{-I(t)}S'(t) \\ &= -i(t)e^{-I(t)}S(t) + i(t)e^{-I(t)}S(t) \quad \text{d'après a)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, \varphi'(t) = 0$ .

$\varphi$  est constante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc il existe  $l \in \mathbb{R}$ , /  $\forall t \geq 0, \varphi(t) = e^{-I(t)}S(t) = l$ .

Pour  $t = 0$ ,  $e^{-I(0)}S(0) = S(0) = l$  car  $I(0) = 0$ .

Cela donne  $\forall t \geq 0, \varphi(t) = e^{-I(t)}S(t) = S_0$ .

$\forall t \in \mathbb{R}_+, S(t) = S_0e^{I(t)}$ .

**4-c)** \_\_\_\_\_

**Rappelons que  $I$  est la primitive de  $i$  qui s'annule en 0.**

page 5

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

- 1. Donc si  $i(t) = i$ ,  $I(t) = it$ .  $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = S_0 e^{in}$ .

- 2. Les primitives de  $t \mapsto i(1 + a \sin t)$  sont  $t \mapsto i(t - a \cos t) + K$  où  $K$  est une constante réelle.

Pour obtenir  $I$ , primitive qui s'annule pour  $t = 0$ , il faut  $K = ai$ , car on doit avoir l'égalité :  $0 = i(0 - a \cos 0) + K$ ; cela donne effectivement  $K = ai$ .

Cette primitive est donnée par :

$$I(t) = i(t - a \cos t) + ai = i(t - a \cos t + a).$$

$$\forall t \geq 0, I(t) = i(t - a \cos t + a). \forall n \in \mathbb{N}, S(n) = S_0 e^{i(n - a \cos n + a)}.$$

- 3. Les primitives de  $t \mapsto i(1 + ae^{-t})$  sont  $t \mapsto i(t - ae^{-t}) + K$ , où  $K$  est une constante réelle.

Pour obtenir  $I$ , primitive qui s'annule pour  $t = 0$ , il faut  $K = ai$ , car on doit avoir l'égalité :

$$0 = i(0 - ae^{-0}) + K, \text{ ce qui donne effectivement } k = ai.$$

Cette primitive est alors donnée par :

$$I(t) = i(t - ae^{-t}) + ai = i(t - ae^{-t} + a).$$

$$\forall t \geq 0, I(t) = i(t - ae^{-t} + a). \forall n \in \mathbb{N}, S(n) = S_0 e^{i(n - ae^{-n} + a)}.$$

- 4. La primitive  $I$  cherchée est donnée par :

$$\forall t \geq 0, I(t) = i(t + a \underbrace{\int_0^t \sin x e^{-x} dx}_J).$$

Calcul de  $J$  : intégration par parties.

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x & ; & & u'(x) &= \cos x \\ v'(x) &= e^{-x} & ; & & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$J = [(-\sin x)e^{-x}]_0^t + \underbrace{\int_0^t e^{-x} \cos x dx}_K.$$

Calcul de  $K$  : intégration par parties.

$$\begin{aligned} w(x) &= \cos x & ; & & w'(x) &= -\sin x \\ v'(x) &= e^{-x} & ; & & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$w$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned} K &= [(-\cos x)e^{-x}]_0^t - \int_0^t (\sin x)e^{-x} dx \\ &= 1 - (\cos t)e^{-t} - J. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J &= [(-\sin x)e^{-x}]_0^t + K \\ &= -(\sin t)e^{-t} + (1 - (\cos t)e^{-t} - J) \\ 2J &= -(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t} \\ J &= \frac{1}{2} \left( -(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t} \right). \end{aligned}$$

$$\forall t \geq 0, I(t) = i(t + \frac{a}{2} (-(\sin t)e^{-t} + 1 - (\cos t)e^{-t})).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = S_0 \exp \left( i \left( n + \frac{a}{2} (-(\sin n)e^{-n} + 1 - (\cos n)e^{-n}) \right) \right).$$

Allure des courbes correspondantes :

