RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

INTEGRATION

PRIMITIVES
INTEGRATION

PRIMITIVES

DEFINITION : *Soit F et f deux applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, dans $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I, si $F' = f$.*

THEOREME : Toute fonction, définie, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I.

PROPOSITION : Soit f est une application continue sur I et F une primitive de f sur I. Alors toutes les primitives de f sont de la forme $G : x \longmapsto F(x) + k \ / \ k \in \mathbb{R}$.

Unicité de la primitive prenant en un point donné une valeur donnée

Soit F une primitive de f, application continue sur I. Considérons un point x_0 de I et une valeur réelle quelconque y_0. Alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend en x_0 la valeur y_0 : c'est l'application $x \longmapsto F(x) - F(x_0) + y_0$.

Notation : La primitive de f qui s'annule en x_0 se note $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

On a donc $\forall x \in I, \quad F(x) - F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt.$

OPERATIONS

Si f et g sont deux applications continues sur un intervalle I et F et G deux primitives de f et g respectivement. Alors

- $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda F$ est une primitive de λf.
- Si f et g sont dérivables sur I, alors fg est une primitive de $fg' + f'g$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

• Si u est une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et **à valeurs dans** J ,, f est une application dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ alors $f \circ u$ est une primitive de $f' \circ u \times u'$.

PRIMITIVES USUELLES

Tableau des différents résultats

Fonctions	Primitives
x^n où $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$
$\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$	$\sum_{k=0}^{k=n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
e^x	$e^x + C$
x^α où $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
a^x où $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

Soit f une application continue sur un segment $[a, b], (a \leq b)$,

DEFINITION : *On appelle intégrale (ou intégrale de Riemann) de f sur $[a, b]$ le nombre réel $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$. On dira alors que f est intégrable sur $[a, b]$.*

C'est la formule fondamentale du calcul intégral.

PROPRIETES

RELATION DE CHASLES : Soit f une fonction continue sur un intervalle non vide I et non réduit à un point, et x, y, z trois éléments de I :

$$\int_x^z f(t)dt = \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt.$$

LINEARITE DE L'INTEGRATION

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle non vide I, λ et μ deux réels quelconques. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

POSITIVITE

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Soit f une fonction continue sur un intervalle non vide I et $a \leq b$ deux éléments de I.

$$(\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

CONSEQUENCES

$(\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0)$: $(\int_a^b f(x)dx = 0) \Longrightarrow (\forall x \in [a,b]\ ,\ f(x) = 0)$

Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$: $(\ \exists\, x_0 \in [a,b]\ /\ f(x_0) > 0) \Longrightarrow (\int_a^b f(x)dx > 0)$

COMPARAISON DES INTEGRALES

Soit f, g deux applications continues sur un intervalle non vide I et non réduit à un point, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

$$(\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

ENCADREMENT

Soit f une application continue sur $[a,b]$, $(a \leq b)$.

Il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in [a,b],\ A \leq f(x) \leq B$. Alors

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a).$$

MAJORATION DE LA VALEUR ABSOLUE

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ ($a \leq b$). Alors

$$\Big|\int_a^b f(x)\Big|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

METHODE DES RECTANGLES

SOMMES DE RIEMANN

PROPOSITION : Soit f une application continue sur $[a,b]$. La somme $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$ a pour limite $\int_a^b f(x)dx$ quand n tend vers $+\infty$.

DEFINITION : *La somme* $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$ *s'appelle somme de Riemann de* f *sur* $[a,b]$. Ce n'est pas la seule ; en voici deux autres :

$S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ et $S''_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$.

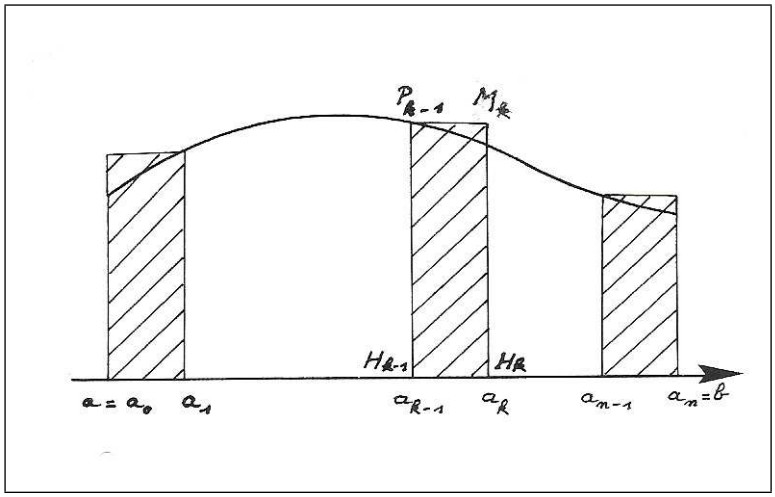
Interprétation géométrique lorsque $f \geq 0$

Considérons le rectangle $R_k = H_{k-1}P_{k-1}M_kH_k$. Il a pour aire $(a_k - a_{k-1})f(a_k) = \frac{b-a}{n}f(a_k)$. La somme des aires des rectangles R_k pour $1 \leq k \leq n$ n'est autre que S_n.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Comme cette dernière a pour limite $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $n \to +\infty$, elle constitue une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$. Or on sait que cette intégrale représente l'aire de la surface plane limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$. On a donc aussi une valeur approchée de l'aire de la surface.



Remarque : Cette méthode, dite méthode des rectangles, est très utilisée, surtout quand f est monotone sur $[a, b]$ car elle permet un encadrement de l'intégrale et une majoration de l'erreur commise en prenant S_n pour valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$

$$\left| S_n - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left| \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \right|$$

EXEMPLE CLASSIQUE : La série harmonique

Soit $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On a l'encadrement, pour $k \geq 2$: $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t}$; puis, par sommation : $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t}$, soit finalement en ajoutant 1 aux trois membres :

$1 + \ln n \leq h_n \leq \ln(n+1) - \ln 2 + 1$. On obtient alors, par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty$; $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

TECHNIQUES D'INTEGRATION

INTEGRATION PAR PARTIES

Soient u et v deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$.

Alors $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Cette méthode permet entre autre de trouver des primitives (il suffit de mettre une borne variable x à la place de b) ; elle permet aussi d'établir des relations de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier n.

CHANGEMENT DE VARIABLE

Soit f est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ et φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$. Soit (t_0,t_1) un couple d'éléments de $[\alpha,\beta]$ / $\varphi(t_0)=a$ et $\varphi(t_1)=b$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt.$$

Concrètement : **1)** On part de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. On pose $x=\varphi(t)$; alors $dx=\varphi'(t)dt$ et on cherche t_0 et t_1 tels que $\varphi(t_0)=a$ et $\varphi(t_1)=b$.

2) On part de $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt$. On pose $x=\varphi(t)$; donc $dx=\varphi'(t)dt$ et on calcule les ‹‹ nouvelles bornes ›› : $a=\varphi(t_0)$ et $b=\varphi(t_1)$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021