RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

INTEGRATION

PRIMITIVES
INTEGRATION

PRIMITIVES

DEFINITION : *Soit F et f deux applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, dans $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I, si $F' = f$.*

THEOREME : Toute fonction, définie, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I.

PROPOSITION : Soit f est une application continue sur I et F une primitive de f sur I. Alors toutes les primitives de f sont de la forme $G : x \longmapsto F(x) + k \ / \ k \in \mathbb{R}$.

Unicité de la primitive prenant en un point donné une valeur donnée

Soit F une primitive de f, application continue sur I. Considérons un point x_0 de I et une valeur réelle quelconque y_0. Alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend en x_0 la valeur y_0 : c'est l'application $x \longmapsto F(x) - F(x_0) + y_0$.

Notation : La primitive de f qui s'annule en x_0 se note $x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

On a donc $\forall x \in I, \quad F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$

OPERATIONS

Si f et g sont deux applications continues sur un intervalle I et F et G deux primitives de f et g respectivement. Alors

- $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda F$ est une primitive de λf.
- Si f et g sont dérivables sur I, alors fg est une primitive de $fg' + f'g$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

- Si u est une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et **à valeurs dans** J ,, f est une application dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ alors $f \circ u$ est une primitive de $f' \circ u \times u'$.

PRIMITIVES USUELLES

Tableau des différents résultats

Fonctions	Primitives
x^n où $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
e^x	$e^x + C$
x^α où $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
a^x où $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

Soit f une application continue sur un segment $[a, b], (a \leq b)$,

DEFINITION : *On appelle intégrale (ou intégrale de Riemann) de f sur $[a, b]$ le nombre réel $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$. On dira alors que f est intégrable sur $[a, b]$.*

C'est la formule fondamentale du calcul intégral.

PROPRIETES

RELATION DE CHASLES : Soit f une fonction continue sur un intervalle non vide I et non réduit à un point, et x, y, z trois éléments de I :

$$\int_x^z f(t)dt = \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt.$$

LINEARITE DE L'INTEGRATION

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle non vide I, λ et μ deux réels quelconques. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

POSITIVITE

Soit f une fonction continue sur un intervalle non vide I et $a \leq b$ deux éléments de I.

$$(\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

CONSEQUENCES

$(\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0)$: $(\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0) \Longrightarrow (\forall x \in [a,b]\ ,\ f(x) = 0)$

Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$: $(\ \exists\, x_0 \in [a,b]\ /\ f(x_0) > 0) \Longrightarrow (\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0)$

COMPARAISON DES INTEGRALES

Soit f, g deux applications continues sur un intervalle non vide I et non réduit à un point, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

$(\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)) \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

ENCADREMENT

Soit f une application continue sur $[a,b]$, $(a \leq b)$.

Il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in [a,b],\ A \leq f(x) \leq B$. Alors

$$A(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq B(b-a).$$

MAJORATION DE LA VALEUR ABSOLUE

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ ($a \leq b$). Alors

$$\left|\int_a^b f(x)\right|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

METHODE DES RECTANGLES

SOMMES DE RIEMANN

PROPOSITION : Soit f une application continue sur $[a,b]$. La somme $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$ a pour limite $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ quand n tend vers $+\infty$.

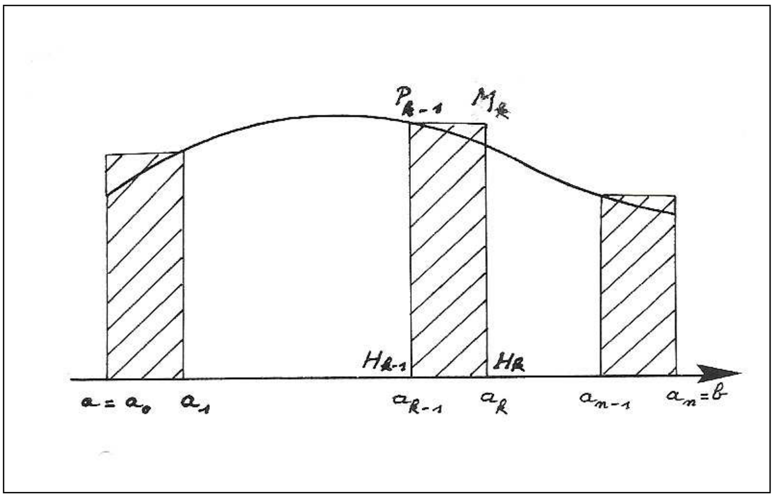
DEFINITION : *La somme $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$ s'appelle somme de Riemann de f sur $[a,b]$.* Ce n'est pas la seule ; en voici deux autres :

$S'_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$ et $S''_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$.

Interprétation géométrique lorsque $f \geq 0$

Considérons le rectangle $R_k = H_{k-1}P_{k-1}M_kH_k$. Il a pour aire $(a_k - a_{k-1})f(a_k) = \dfrac{b-a}{n}f(a_k)$. La somme des aires des rectangles R_k pour $1 \leq k \leq n$ n'est autre que S_n.

Comme cette dernière a pour limite $\int_a^b f(x)dx$ lorsque $n \to +\infty$, elle constitue une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$. Or on sait que cette intégrale représente l'aire de la surface plane limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$. On a donc aussi une valeur approchée de l'aire de la surface.



Remarque : Cette méthode, dite méthode des rectangles, est très utilisée, surtout quand f est monotone sur $[a, b]$ car elle permet un encadrement de l'intégrale et une majoration de l'erreur commise en prenant S_n pour valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$

$$\left| S_n - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left| \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \right|$$

<u>EXEMPLE CLASSIQUE : La série harmonique</u>

Soit $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On a l'encadrement, pour $k \geq 2$: $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t}$; puis, par sommation : $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t}$, soit finalement en ajoutant 1 aux trois membres :

$1 + \ln n \leq h_n \leq \ln(n+1) - \ln 2 + 1$. On obtient alors, par encadrement : $\lim_{n \to +\infty} h_n = +\infty$; $\quad h_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.

TECHNIQUES D'INTEGRATION

INTEGRATION PAR PARTIES

Soient u et v deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$.

Alors $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

Cette méthode permet entre autre de trouver des primitives (il suffit de mettre une borne variable x à la place de b) ; elle permet aussi d'établir des relations de récurrence entre des intégrales dépendant d'un entier n.

CHANGEMENT DE VARIABLE

Soit f est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ et φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$. Soit (t_0,t_1) un couple d'éléments de $[\alpha,\beta]$ / $\varphi(t_0) = a$ et $\varphi(t_1) = b$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt.$$

Concrètement : 1) On part de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. On pose $x = \varphi(t)$; alors $dx = \varphi'(t)dt$ et on cherche t_0 et t_1 tels que $\varphi(t_0) = a$ et $\varphi(t_1) = b$.

2) On part de $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt$. On pose $x = \varphi(t)$; donc $dx = \varphi'(t)dt$ et on calcule les « nouvelles bornes » : $a = \varphi(t_0)$ et $b = \varphi(t_1)$.