BILINEAIRE 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit E un espace euclidien et $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} ||x - x_i||^2$ atteint son minimum en $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : bilinéaire, euclidien.2

Notons $\langle a, b\rangle$ le produit scalaire des vecteurs a et b de E.
On écrit $x - x_i = (x - \overline{x}) + (\overline{x} - x_i)$; il vient alors
$||x - x_i||^2 = ||x - \overline{x}||^2 + ||\overline{x} - x_i||^2 + 2\langle x - \overline{x}, \overline{x} - x_i\rangle$
Sommons ces égalités de $i = 1$ à $i = n$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(||x - \overline{x}||^2 + ||\overline{x} - x_i||^2 + 2\langle x - \overline{x}, \overline{x} - x_i\rangle \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||x - \overline{x}||^2 + \sum_{i=1}^{n} ||\overline{x} - x_i||^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \langle x - \overline{x}, \overline{x} - x_i\rangle \\ &= n||x - \overline{x}||^2 + f(\overline{x}) + 2\langle x - \overline{x}, \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} - x_i)\rangle \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable

$$\begin{aligned} &= n||x - \overline{x}||^2 + f(\overline{x}) + 2\langle x - \overline{x}, n\overline{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i\rangle \\ &= n||x - \overline{x}||^2 + f(\overline{x}) + 2\langle x - \overline{x}, 0_E\rangle \end{aligned}$$

car $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ équivaut à $n\overline{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$

Donc $f(x) = n||x - \overline{x}||^2 + f(\overline{x})$

Pour tout $x \in E$, $f(x) \geq f(\overline{x})$**, donc** f **admet un minimum en** $\overline{x}$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021