BILINEAIRE 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit E un espace euclidien et $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} ||x - x_i||^2$ atteint son minimum en $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Eléments de correction : bilinéaire, euclidien.2

Notons $\langle a, b\rangle$ le produit scalaire des vecteurs a et b de E.
On écrit $x - x_i = (x - \overline{x}) + (\overline{x} - x_i)$; il vient alors
$||x - x_i||^2 = ||x - \overline{x}||^2 + ||\overline{x} - x_i||^2 + 2\langle x - \overline{x}, \overline{x} - x_i\rangle$
Sommons ces égalités de $i = 1$ à $i = n$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(||x - \overline{x}||^2 + ||\overline{x} - x_i||^2 + 2\langle x - \overline{x}, \overline{x} - x_i\rangle \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} ||x - \overline{x}||^2 + \sum_{i=1}^{n} ||\overline{x} - x_i||^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \langle x - \overline{x}, \overline{x} - x_i\rangle \\
&= n||x - \overline{x}||^2 + f(\overline{x}) + 2\langle x - \overline{x}, \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} - x_i)\rangle \\
&\quad \text{en utilisant la linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable} \\
&= n||x - \overline{x}||^2 + f(\overline{x}) + 2\langle x - \overline{x}, n\overline{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i\rangle \\
&= n||x - \overline{x}||^2 + f(\overline{x}) + 2\langle x - \overline{x}, 0_E\rangle
\end{aligned}$$

car $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ équivaut à $n\overline{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E$

Donc $f(x) = n||x - \overline{x}||^2 + f(\overline{x})$

Pour tout $x \in E,\ f(x) \geq f(\overline{x})$, donc f admet un minimum en $\overline{x}$