ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–7

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. On considère l'application φ de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)f(x)dx.$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit u l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = P(0)$$

Existe-t-il un polynôme T de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = \varphi(P,T)$?

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 7

1)

Il est clair que $\varphi(P,Q)$ existe pour tout couple $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$ puisque le produit PQf est une fonction continue sur $[0;1]$.

Par les propriétés de l'intégration, la commutativité du produit des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la distributivité de la multiplication sur l'addition des applications, il est immédiat que φ est une application bilinéaire, symétrique.

Puisque $\forall x \in [0;1],\ f(x) \geq 0$, on obtient tout de suite également que

$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 f(x)P^2(x)dx \geq 0$ puisque les bornes sont dans l'ordre croissant.

Conclusion : φ est une forme bilinéaire, symétrique, positive sur $\mathbb{R}[X]$.

Cherchons donc la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit une forme définie.

Analysons la situation :

Si φ est définie, alors $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P \neq 0 \Longrightarrow \varphi(P,P) > O$.

En particulier pour le polynôme P_0, constant et égal à 1, on aura : $\int_0^1 f(x)dx > 0$.

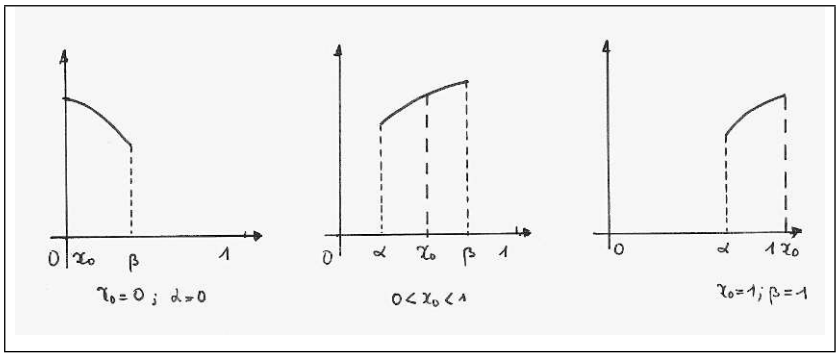
Or f est continue, positive ou nulle sur $[0,1]$, donc l'intégrale est ≥ 0 et elle vaut 0 si et seulement si f est la fonction nulle.

Conclusion : $\int_0^1 f(x)dx > 0$ entraine que f n'est pas la fonction nulle.

Réciproquement, supposons que f ne soit pas la fonction nulle et considérons un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$.

Cela équivaut à $\int_0^1 f(x)P^2(x)dx = 0$. Or la fonction $x \in [0;1] \longmapsto f(x)P^2(x)$ est continue, positive ou nulle, donc $\int_0^1 f(x)P^2(x)dx = 0 \Longrightarrow \forall x \in [0;1],\ f(x)P^2(x) = 0$.

La fonction f n'est pas la fonction nulle ; il existe donc un réel $x_0 \in [0;1]\ /\ f(x_0) > 0$. Par continuité de f il existe un intervalle $[\alpha,\beta] \in [0;1](\alpha < \beta)$ sur lequel $f > 0$.



$\forall x \in [\alpha,\beta],\ f(x)P^2(x) = 0 \Longrightarrow P^2(x) = 0$, donc $P(x) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines - tous les réels de l'intervalle $[\alpha,\beta]$ -, c'est donc le polynôme nul.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Conclusion : $\varphi(P,P)=0 \Longrightarrow P=0$. La condition " f n'est pas l'application nulle " est suffisante.

φ est un produit scalaire si et seulement si f n'est pas l'application nulle

2)

Supposons qu'il existe un polynôme T tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)=\varphi(P,T)$; cela se traduira par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0)=\int_0^1 f(x)P(x)T(x)dx \qquad \textbf{(1)}$$

Soit $n \geq 1$ et P défini par $\forall x \in [0;1],\ P(x)=x^nT(x)$.

La relation (1) donne $0=\displaystyle\int_0^1 f(x)x^nT^2(x)dx$.

$x \longmapsto f(x)x^nT^2(x)$ est continue, positive ou nulle sur $[0;1]$, on obtient donc

$$\forall x \in [0;1],\ f(x)x^nT^2(x)=0.$$

Par le même raisonnement que dans la question 1), on obtient que $x \longmapsto x^nT^2(x)$ est le polynôme nul, donc T^2 est le polynôme nul puisque $x \longmapsto x^n$ ne l'est pas et finalement T est le polynôme nul.

Conclusion : s'il existe un polynôme T tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)=\varphi(P,T)$, alors T est le polynôme nul.

On aurait alors $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)=0$, c'est-à-dire $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0)=0$, ce qui est manifestement faux.

Il n'existe pas de polynôme T tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ u(P)=\varphi(P,T)$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021