ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–8

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ {}^tM = -M\}$.

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est un espace vectoriel et en donner sa dimension.

2) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Déterminer les éléments propres de J.

b) Soit X un vecteur propre de J. On pose $X = U + iV$ où U et V sont deux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Montrer que U et V sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA = -A$. On pose $B = A^2$.

3–a) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que les valeurs propres de B sont négatives ou nulles.

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de A sont de la forme ia avec a réel non nul.

4) Soit $X = U + iV$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre non nulle ia, où U et V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Calculer $AU + aV$.

b) En déduire la valeur du produit scalaire $\langle U, V\rangle$.

5) Si $X = U + iV$ est un vecteur propre de A où U et V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, a-t-on toujours $\langle U, V\rangle = 0$?

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 8

1)

Il est évident que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Déterminons sa dimension.

Soit $M = (a_{k,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; $a_{k,j} \in \mathbb{C}$ et $(k,j) \in \Big(\llbracket 1,n \rrbracket\Big)^2$.

${}^tM = -M \Longleftrightarrow \forall (k,j) \in \Big(\llbracket 1,n \rrbracket\Big)^2,\ a_{k,j} = -a_{k,j}$. Cela donne

$$\forall k \in \llbracket 1,n \rrbracket,\ a_{k,k} = 0 \text{ et } \forall (k,j) \in \Big(\llbracket 1,n \rrbracket\Big)^2,\ k \neq j,\ a_{k,j} = -a_{k,j}$$

Donc une matrice $M \in \mathcal{T}$ s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & \dots & \dots & -a_{1,n} \\ a_{1,2} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & \dots & \dots & a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $1 \leq k < j \leq n$, posons $M_{k,j}$ la matrice antisymétrique dont tous les termes sont nuls sauf le terme k ème ligne j ème colonne qui vaut -1 et le terme j ème ligne k ème colonne qui vaut 1.

On a alors $M = \displaystyle\sum_{1 \leq k < j \leq n} a_{k,j} M_{k,j}$

La famille $(M_{k,j\,(1 \leq k < j \leq n)})$ est une famille génératrice de $\mathcal{T}$.

Considérons l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{1 \leq k < j \leq n} \beta_{k,j} M_{k,j} = (0)$ où les $\beta_{k,j} \in \mathbb{C}$. En effectuant le terme de gauche de l'égalité, on obtient l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta_{1,2} & \dots & \dots & -\beta_{1,n} \\ \beta_{1,2} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\beta_{n-1,n} \\ \beta_{1,n} & \dots & \dots & \beta_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} = (0).$$

Il est clair alors que tous les coefficients $\beta_{k,j}$ sont nuls, donc la famille est libre.

La famille $(M_{k,j\,(1 \leq k < j \leq n)})$ est une base de $\mathcal{T}$.

Quel est son cardinal ? C'est le nombre de façons de choisir et de ranger dans l'ordre strictement croissant 2 nombres pris entre 1 et n. Ce nombre est $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

La dimension de $\mathcal{T} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2–a)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; λ est valeur propre de J si et seulement si la matrice $J - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Effectuons $L_1 \longleftarrow L_1 + \lambda L_2$, on obtient la matrice équivalente $\begin{pmatrix} 0 & -(1+\lambda^2) \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Cette matrice n'est pas inversible si et seulement si $1+\lambda^2=0$, donc si et seulement si $\lambda \in \{-i, i\}$. Notons $E(\lambda, J)$ le sous-espace propre de J associé à la valeur propre λ.

$X=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E(\lambda, J) \Longleftrightarrow a=\lambda b.$

- $\lambda = i$. $X=\begin{pmatrix} ib \\ b \end{pmatrix}$ / $b \in \mathbb{C}$.

$E(i, J)=\text{vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

- $\lambda = -i$. $X=\begin{pmatrix} -ib \\ b \end{pmatrix}$ / $b \in \mathbb{C}$.

$E(i, J)=\text{vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2–b)

Soit $\lambda = i$. $b \in \mathbb{C}$, donc $\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ / $b=\alpha+i\beta$.
Donc
$X=b\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}=(\alpha+i\beta)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha i-\beta \\ \alpha+i\beta \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } V=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X=U+iV$$

$\langle U, V\rangle = {}^tUV = \begin{pmatrix} -\beta & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=0$

Soit $\lambda=-i$. $b=\alpha+i\beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
Donc
$X=b\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}=(\alpha+i\beta)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha i+\beta \\ \alpha+i\beta \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } V=\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X=U+iV$$

$\langle U, V\rangle = {}^tUV = \begin{pmatrix} \beta & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}=0$

3–a)

${}^tB={}^t(A^2)=({}^tA)^2=(-A)^2=A^2=B.$

La matrice B est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable (en base orthonormée d'ailleurs).

3–b)

Soit $\lambda \in \text{spect}(B)$ et X une colonne propre (non nulle) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée à la valeur λ.

$$\begin{aligned} BX=\lambda X \quad & \Longrightarrow {}^tXBX=\lambda^tXX \\ & \Longrightarrow {}^tXA.AX=\lambda||X||^2 \\ & \Longrightarrow -{}^tX^tA.AX=\lambda||X||^2 \quad \text{car } A=-{}^tA \\ & \Longrightarrow -{}^t(AX).AX=\lambda||X||^2 \\ & \Longrightarrow -||AX||^2=\lambda||X||^2 \end{aligned}$$

Puisque $||X||>0$, on en déduit $\lambda=-\dfrac{||AX||^2}{||X||^2} \leq 0$

3–c)

Soit $\mu \in \text{spect}(A) - \{0\}$. On sait que $\mu^2 \in \text{spect}(A^2)$, donc $\mu^2 \in \text{spect}(B)$. Il en résulte que $\mu^2 \leq 0$; il existe $a \in \mathbb{R}$ / $\mu = ia$ et puisque $\mu \neq 0$, on conclut $a \neq 0$.

Les valeurs propres non nulles de A sont des imaginaire purs, non nuls

4–a)

Soit $X = U + iV$, vecteur propre associé à la valeur propre ia. On a donc $AX = iaX$, ce qui donne

$A(U + iV) = ia(U + iV)$, soit $AU + iAV = iaU - aV$ et finalement $AU + aV = i(aU - AV)$.

$AU+aV \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $i(aU-AV) \in i\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; l'égalité impose $AU+aV = aU-AV = (0)$. En effet le terme de la ligne k de $AU+aV$ est réel et celui de $i(aU-AV)$ est imaginaire pur. Donc les deux sont nuls.

$$AU + aV = 0$$

4–b)

Calculons :

$$\begin{aligned}\langle AU, U\rangle &= {}^t(AU)U \\ &= {}^tU{}^tAU \\ &= -{}^tUAU \\ &= -\langle U, AU\rangle = -\langle AU, U\rangle\end{aligned}$$

Donc $\langle AU, U\rangle = 0$; or $AU = -aV$, donc $-a\langle V, U\rangle = 0$ et puisque $a \neq 0$, on conclut que

$$\langle U, V\rangle = 0.$$

5)

Si la réponse est non, elle ne peut provenir que du cas où $a = 0$.

Considérons la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle est antisymétrique et admet la valeur propre 0 : sa troisième colonne est nulle et un vecteur propre associé est $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $(1 + i)X$ est aussi vecteur propre associé à 0. De plus $(1 + i)X = X + iX$.

Ici $U = V = X$. $\langle U, V\rangle = ||X||^2 = 1 \neq 0$.