ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–8

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ {}^tM = -M\}$.

1) Montrer que $\mathcal{T}$ est un espace vectoriel et en donner sa dimension.

2) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

a) Déterminer les éléments propres de J.

b) Soit X un vecteur propre de J. On pose $X = U + iV$ où U et V sont deux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Montrer que U et V sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tA = -A$. On pose $B = A^2$.

3–a) Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que les valeurs propres de B sont négatives ou nulles.

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de A sont de la forme ia avec a réel non nul.

4) Soit $X = U + iV$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre non nulle ia, où U et V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Calculer $AU + aV$.

b) En déduire la valeur du produit scalaire $\langle U, V\rangle$.

5) Si $X = U + iV$ est un vecteur propre de A où U et V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, a-t-on toujours $\langle U, V\rangle = 0$?

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 8

1)

Il est évident que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Déterminons sa dimension.

Soit $M=(a_{k,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; $a_{k,j}\in\mathbb{C}$ et $(k,j)\in\left([\![1,n]\!]\right)^2$.

${}^tM=-M\Longleftrightarrow\forall(k,j)\in\left([\![1,n]\!]\right)^2,\ a_{k,j}=-a_{k,j}$. Cela donne

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ a_{k,k}=0\text{ et }\forall(k,j)\in\left([\![1,n]\!]\right)^2,\ k\neq j,\ a_{k,j}=-a_{k,j}$$

Donc une matrice $M\in\mathcal{T}$ s'écrit

$$M=\begin{pmatrix}0&-a_{1,2}&\dots&\dots&-a_{1,n}\\a_{1,2}&0&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&-a_{n-1,n}\\a_{1,n}&\dots&\dots&a_{n-1,n}&0\end{pmatrix}$$

Pour $1\leq k<j\leq n$, posons $M_{k,j}$ la matrice antisymétrique dont tous les termes sont nuls sauf le terme k ème ligne j ème colonne qui vaut -1 et le terme j ème ligne k ème colonne qui vaut 1.

On a alors $M=\sum_{1\leq k<j\leq n}a_{k,j}M_{k,j}$

La famille $(M_{k,j\,(1\leq k<j\leq n)})$ est une famille génératrice de $\mathcal{T}$.

Considérons l'égalité suivante : $\sum_{1\leq k<j\leq n}\beta_{k,j}M_{k,j}=(0)$ où les $\beta_{k,j}\in\mathbb{C}$. En effectuant le terme de gauche de l'égalité, on obtient l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix}0&-\beta_{1,2}&\dots&\dots&-\beta_{1,n}\\\beta_{1,2}&0&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&-\beta_{n-1,n}\\\beta_{1,n}&\dots&\dots&\beta_{n-1,n}&0\end{pmatrix}=(0).$$

Il est clair alors que tous les coefficients $\beta_{k,j}$ sont nuls, donc la famille est libre.

La famille $(M_{k,j\,(1\leq k<j\leq n)})$ est une base de $\mathcal{T}$.

Quel est son cardinal ? C'est le nombre de façons de choisir et de ranger dans l'ordre strictement croissant 2 nombres pris entre 1 et n. Ce nombre est $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

La dimension de $\mathcal{T}=\frac{n(n-1)}{2}$.

2–a)

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$; λ est valeur propre de J si et seulement si la matrice $J-\lambda I_2=\begin{pmatrix}-\lambda&-1\\1&-\lambda\end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Effectuons $L_1\longleftarrow L_1+\lambda L_2$, on obtient la matrice équivalente $\begin{pmatrix}0&-(1+\lambda^2)\\1&-\lambda\end{pmatrix}$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Cette matrice n'est pas inversible si et seulement si $1+\lambda^2=0$, donc si et seulement si $\lambda \in \{-i, i\}$. Notons $E(\lambda, J)$ le sous-espace propre de J associé à la valeur propre λ.

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E(\lambda, J) \Longleftrightarrow a = \lambda b.$

- $\lambda = i.\ X = \begin{pmatrix} ib \\ b \end{pmatrix} \ / \ b \in \mathbb{C}.$

$E(i, J) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

- $\lambda = -i.\ X = \begin{pmatrix} -ib \\ b \end{pmatrix} \ / \ b \in \mathbb{C}.$

$E(i, J) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2–b)

Soit $\lambda = i. \quad b \in \mathbb{C}$, donc $\exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ b = \alpha + i\beta.$

Donc

$$X = b\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha + i\beta)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha i - \beta \\ \alpha + i\beta \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X = U + iV$$

$$\langle U, V \rangle = {}^tUV = \begin{pmatrix} -\beta & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

Soit $\lambda = -i. \quad b = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Donc

$$X = b\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha + i\beta)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha i + \beta \\ \alpha + i\beta \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } V = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X = U + iV$$

$$\langle U, V \rangle = {}^tUV = \begin{pmatrix} \beta & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

3–a)

${}^tB = {}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2 = B.$

La matrice B est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable (en base orthonormée d'ailleurs).

3–b)

Soit $\lambda \in \text{spect}(B)$ et X une colonne propre (non nulle) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée à la valeur λ.

$$\begin{aligned} BX = \lambda X \quad &\Longrightarrow {}^tXBX = \lambda {}^tXX \\ &\Longrightarrow {}^tXA.AX = \lambda ||X||^2 \\ &\Longrightarrow -{}^tX{}^tA.AX = \lambda ||X||^2 \quad \text{car } A = -{}^tA \\ &\Longrightarrow -{}^t(AX).AX = \lambda ||X||^2 \\ &\Longrightarrow -||AX||^2 = \lambda ||X||^2 \end{aligned}$$

Puisque $||X|| > 0$, on en déduit $\lambda = -\dfrac{||AX||^2}{||X||^2} \leq 0$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3–c)

Soit $\mu \in \text{spect}(A) - \{0\}$. On sait que $\mu^2 \in \text{spect}(A^2)$, donc $\mu^2 \in \text{spect}(B)$. Il en résulte que $\mu^2 \leq 0$; il existe $a \in \mathbb{R}$ / $\mu = ia$ et puisque $\mu \neq 0$, on conclut $a \neq 0$.

Les valeurs propres non nulles de A sont des imaginaire purs, non nuls

4–a)

Soit $X = U + iV$, vecteur propre associé à la valeur propre ia. On a donc $AX = iaX$, ce qui donne

$A(U + iV) = ia(U + iV)$, soit $AU + iAV = iaU - aV$ et finalement $AU + aV = i(aU - AV)$.

$AU + aV \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $i(aU - AV) \in i\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; l'égalité impose $AU + aV = aU - AV = (0)$. En effet le terme de la ligne k de $AU + aV$ est réel et celui de $i(aU - AV)$ est imaginaire pur. Donc les deux sont nuls.

$$AU + aV = 0$$

4–b)

Calculons :

$$\begin{aligned} \langle AU, U\rangle &= {}^t(AU)U \\ &= {}^tU{}^tAU \\ &= -{}^tUAU \\ &= -\langle U, AU\rangle = -\langle AU, U\rangle \end{aligned}$$

Donc $\langle AU, U\rangle = 0$; or $AU = -aV$, donc $-a\langle V, U\rangle = 0$ et puisque $a \neq 0$, on conclut que

$$\langle U, V\rangle = 0.$$

5)

Si la réponse est non, elle ne peut provenir que du cas où $a = 0$.

Considérons la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle est antisymétrique et admet la valeur propre 0 : sa troisième colonne est nulle et un vecteur propre associé est $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $(1 + i)X$ est aussi vecteur propre associé à 0. De plus $(1 + i)X = X + iX$.

Ici $U = V = X$. $\langle U, V\rangle = ||X||^2 = 1 \neq 0$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021