ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–9

Soit p un entier naturel. On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p. On se donne $(p+1)$ réels distincts $x_0, \ldots, x_p$.

Soit deux polynômes A et B de $\mathbb{R}_p[X]$; on pose $\langle A, B\rangle = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{p} A(x_i)B(x_i)$.

1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

On pose alors :

- $||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$;
- $E(A) = \langle A, 1\rangle$;
- $C(A,B) = \langle A - E(A), B - E(B)\rangle$;
- $V(A) = C(A,A)$.

2) Démontrer, pour tous polynômes A et B de $(\mathbb{R}_p[X])^2$, les relations suivantes :

a) $V(A) = ||A||^2 - (E(A))^2$ et $C(A,B) = \langle A, B\rangle - E(A)E(B)$.

b) $|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$.

Dans quel cas a-t-on égalité ?

3) Soit A fixé dans $\mathbb{R}_p[X]$.

a) Déterminer, en fonction de $E(A)$ et de $V(A)$, le projeté orthogonal de A sur la sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_0[X]$, puis la distance de A à ce sous-espace.

b) Si $\deg(A) \geq 1$, on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_p[X]$ engendré par les polynômes A et 1.

Déterminer une base orthonormale de F dont le premier vecteur est le polynôme 1.

c) Soit B un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ différent de A.

Déterminer, en fonction de $E(A), E(B), V(A)$ et $C(A,B)$, le projeté orthogonal de B sur le sous-espace F, sous la forme $\lambda A + \mu 1$.

Préciser la distance de B à F.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 9

1)

Il est évident que l'application $(A,B) \in (\mathbb{R}_p[X])^2 \longmapsto \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{p} A(x_i)B(x_i)$ est une forme bilinéaire symétrique : cela résulte entre autres de la distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$ ainsi que de la commutativité de la somme et du produit.

$\langle A,A\rangle = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{p} A(x_i)^2 \geq 0$. De plus cette somme est nulle si et seulement si pour tout $i \in [\![0,p]\!]$, $A(x_i)=0$. Le polynôme A admet $p+1$ racines réelles distinctes, il est de degré inférieur ou égal à p, donc il est nul.

En conclusion, l'application $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

2–a)

$$\begin{aligned} C(A,B) &= \langle A-E(A), B-E(B)\rangle \\ &= \langle A,B\rangle - \langle A,E(B)\rangle - \langle E(A),B\rangle + \langle E(A),E(B)\rangle \quad \text{par bilinéarité} \\ &= \langle A,B\rangle - \langle A,E(B).1\rangle - \langle E(A).1,B\rangle + \langle E(A).1,E(B).1\rangle \\ &= \langle A,B\rangle - E(B)\langle A,1\rangle - E(A)\langle 1,B\rangle + E(A)E(B)\langle 1,1\rangle \\ &= \langle A,B\rangle - 2E(A)E(B) + E(A)E(B) \quad \text{car } \langle 1,1\rangle = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} 1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$C(A,B) = \langle A,B\rangle - E(A)E(B)$$

- $$V(A) = C(A,A) = ||A-E(A)||^2 = ||A||^2 - (E(A))^2$$

2–b)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, A et $B \in \mathbb{R}_p[X]$;

$$\begin{aligned} E(A+\lambda B) &= \langle A+\lambda B, 1\rangle = \langle A,1\rangle + \lambda\langle B,1\rangle \\ &= E(A) + \lambda E(B) \end{aligned}$$

L'application E est donc une forme linéaire de $\mathbb{R}_p[X]$. On vérifie alors facilement que l'application $(A,B) \in (\mathbb{R}_p[X])^2 \longmapsto C(A,B)$ est bilinéaire, symétrique grâce à la linéarité de E et la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire.

Soit à nouveau $\lambda \in \mathbb{R}$, A et $B \in \mathbb{R}_p[X]$;

$$\begin{aligned} V(A+\lambda B) &= C(A+\lambda B, A+\lambda B) \\ &= C(A,A) + 2\lambda C(A,B) + \lambda^2 C(B,B) \\ &= V(A) + 2\lambda C(A,B) + \lambda^2 V(B) \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $V(A+\lambda B) \geq 0$ car $V(T) = C(T,T) = ||T-E(T)||^2 \geq 0$ pour tout $T \in \mathbb{R}_p[X]$.

- Supposons $V(B)=0$. $V(A+\lambda B) = V(A) + 2\lambda C(A,B) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $C(A,B) \neq 0$, alors l'application $\lambda \longmapsto V(A) + 2\lambda C(A,B)$ est une fonction affine non constante ; elle change donc de signe et cela est impossible.

Donc $V(B)=0 \Longrightarrow C(A,B)=0$ et on a bien l'inégalité $|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$ puisque l'on a $0 \leq 0$.

- Supposons $V(B) > 0$. L'expression $V(A) + 2\lambda C(A,B) + \lambda^2 V(B)$ est un trinôme du second degré qui reste positif ou nul, c'est-à-dire du signe du coefficient de λ^2, sauf quand il est nul. Ce trinôme n'a pas de racine réelles distinctes ; son discriminant est ≤ 0.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$4((C(A,B))^2 - V(A)V(B)) \leq 0$, ce qui se traduit par : $(C(A,B))^2 \leq V(A)V(B))$ et finalement $|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$.

On a bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)V(B)}$

Une autre démonstration :

$|C(A,B)| = |\langle A - E(A), B - E(B)\rangle| \leq ||A - E(A)||.||B - E(B)||$ et $||A - E(A)|| = \sqrt{V(A)}$, donc on a

$$|C(A,B)| \leq \sqrt{V(A)}\sqrt{V(B)}$$

On a égalité si et seulement si le discriminant est nul, donc si le trinôme admet une racine réelle double. Notons a cette racine.

On obtient que $V(A + aB) = 0$. Or $V(A + aB) = ||(A + aB) - E(A + aB)||^2$. D'où l'on conclut $(A + aB) - E(A + aB) = 0$. Si l'on pose $c = E(A + aB)$, on peut énoncer :

$$|C(A,B)| = \sqrt{V(A)V(B)} \iff \exists\,(a,c) \in \mathbb{R}^2 \ / \ A + aB = c$$

3–a)

Notons p_0 la projection orthogonale de $\mathbb{R}_P[X]$ sur $\mathbb{R}_0[X]$. Un polynôme Q de $\mathbb{R}_0[X]$ s'écrit $a.1$ où $a \in \mathbb{R}$. On rappelle que le polynôme 1 est normé.

- $Q = p_0(A) \iff (Q - A) \perp 1$
  $\iff \langle Q - A, 1\rangle = 0$
  $\iff \langle A, 1\rangle = \langle Q, 1\rangle$
  $\iff E(A) = \langle a.1, 1\rangle$
  $\iff E(A) = a$

$$p_0(A) = E(A).1$$

- On sait que $\mathrm{d}(A, \mathbb{R}_0[X]) = ||A - p_0(A)|| = ||A - E(A).1||$, donc

$$\mathrm{d}(A, \mathbb{R}_0[X]) = \sqrt{V(A)}$$

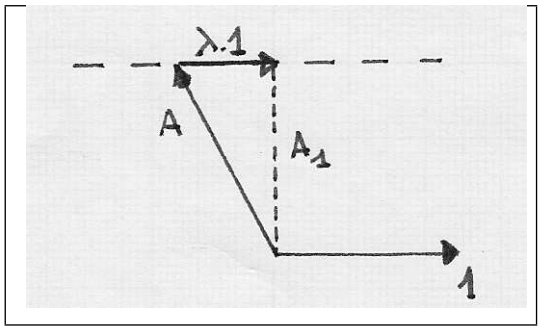
3–b)

- Utilisons l'orthogonalisation de Schmidt. Remarquons que $(1, A)$ est une base de F. Cherchons un vecteur A_1 de F, orthogonal à 1, puis normons le, on aura une base orthonormée de F puisque 1 est un vecteur normé.

Cherchons $A_1 = A + \lambda 1$ othogonal à 1.

$\langle A_1, 1\rangle = \langle A + \lambda 1, 1\rangle = \langle A, 1\rangle + \lambda||1||^2 = E(A) + \lambda$.

$\langle A_1, 1\rangle = 0 \iff \lambda = -E(A)$.



Donc $A_1 = A - E(A).1$ Puis $||A - E(A)||^2 = V(A) > 0$ puisque $A \neq E(A)$. Le vecteur $A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{V(A)}}(A - E(A))$ est normé, orthogonal à 1.

La famille $(1, A_2) = (1, \dfrac{1}{\sqrt{V(A)}}(A - E(A))$ **est une base orthonormée de** F**.**

- D'après le cours, si nous notons p_F la projection otrhogonale de $\mathbb{R}_p[X]$ sur F,

$p_F(B) = \langle B, 1\rangle.1 + \langle B, A_2\rangle A_2 = \langle B, 1\rangle + \dfrac{1}{V(A)}\langle B, A - E(A)\rangle(A - E(A))$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Or $\langle B, A - E(A)\rangle = \langle B, A\rangle - E(A)\langle B, 1\rangle$
$= \langle A, B\rangle - E(A)A(B)$
$\langle B, A - E(A)\rangle = \langle A - E(A), B\rangle = C(A, B)$

Par suite, $p_F(B) = E(B) + \frac{1}{V(A)}C(A, B)(A - E(A))$
$= \frac{C(A, B)}{V(A)}A + E(B) - \frac{C(A, B)E(A)}{V(A)}$

$$p_F(B) = \lambda A + \mu \text{ avec } \lambda = \frac{C(A, B)}{V(A)} \text{ et } \mu = E(B) - \frac{C(A, B)E(A)}{V(A)}$$

- $\mathrm{d}(B, F)^2 = ||B - p_F(B)||^2$ par définition

$= ||B||^2 - ||p_F(B)||^2$ résultat du cours

$= (E(B))^2 + V(B) - V(P_F(B)) - \Big(E(P_F(B))\Big)^2$ d'après 2–a)

$= (E(B))^2 + V(B) - V(\lambda A + \mu) - (E(\lambda A + \mu))^2$

$= (E(B))^2 + V(B) - \lambda^2 V(A) - (\lambda E(A) + \mu)^2$ linéarité de l'espérance

Or $\lambda E(A) + \mu = \frac{C(A, B)}{V(A)}E(A) + E(B) - \frac{C(A, B)E(A)}{V(A)} = E(B)$;

Donc, $\mathrm{d}(B, F)^2 = (E(B))^2 + V(B) - \lambda^2 V(A) - (E(B))^2$
$= V(B) - \frac{(C(A, B))^2}{V(A)}$

$$\mathrm{d}(B, F)^2 = \frac{V(A)V(B) - C(A, B)}{V(A)}.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021