ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = I - C\,{}^tC \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

où C est un vecteur colonne non nul, ${}^tC$ la transposée de C et I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel et on note $||\ ||$ la norme euclidienne associée.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les vecteurs propres associés.

2) A quelle condition sur C l'endomorphisme f est-il une symétrie ? Préciser celle-ci le cas échéant.

3) A quelle condition sur C l'endomorphisme f est-il une projection ? Préciser celle-ci le cas échéant.

4) Dans cette question $n = 4$ et $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $x - y + z - t = 0$.

a) Quelle est la dimension de H ?

b) Soit $u = (1, 0, 1, 0)$. Déterminer le réel α tel que $\alpha = \inf\{||u - v|| \ / \ v \in H\}$.

La valeur de α est-elle atteinte et si oui, préciser pour quel(s) vecteur(s) de H.

c) Déterminer, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, la matrice B de la projection orthogonale sur H.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 10

1)

La matrice A est symétrique ; en effet

$$\begin{aligned} {}^tA &= {}^t(I - C{}^tC) = {}^tI - {}^t(C{}^tC) \\ &= I - {}^t({}^tC){}^tC \\ &= I - C{}^tC = A \end{aligned}$$

La matrice A est symétrique, réelle, donc diagonalisable

- Recherche des valeurs propres.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de A si et seulement s'il existe une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle telle que $AX = \lambda X$.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff (I - C{}^tC)X = \lambda X \\ &\iff X - {}^tCCX = \lambda X \\ &\iff (1-\lambda)X = C{}^tCX \\ &\iff (1-\lambda)X = C({}^tCX) \quad \text{par associativité de la multiplication} \end{aligned}$$

Or ${}^tCX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$; on peut donc l'assimiler à un réel et dans ces conditions l'écrire à gauche de C. Il vient donc

$$AX = \lambda X \iff (1-\lambda)X = ({}^tCX)C \qquad \textbf{(1)}$$

∗ Si $\lambda = 1$, alors l'égalité **(1)** équivaut à $0 = ({}^tCX)C$, ce qui donne ${}^tCX = 0$ puisque $C \neq (0)$. Cela exprime que les colonnes C et X sont orthogonales, ou encore que $X \in (\text{vect}(C))^\perp$

∗ Si $\lambda \neq 1$, alors l'égalité **(1)** impose ${}^tCX \neq 0$. Cette égalité **(1)** équivaut alors à équivaut à $C = \dfrac{1-\lambda}{{}^tCX}X$, donc C est un vecteur propre associé à cette valeur λ.

Pour $X = C$; on obtient : $C = \dfrac{1-\lambda}{{}^tCC}C$, soit $\dfrac{1-\lambda}{{}^tCC} = 1$ puisque $C \neq (0)$.

$1 - \lambda = ||C||^2$ et finalement $\lambda = 1 - ||C||^2$

$$\text{spect}(A) = \{1, 1 - ||C||^2\}$$

- Sous-espaces propres.

Notons $E(\lambda, A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

On peut remarquer que, puisque A est une matrice symétrique réelle, elle diagonalisable en base orthonormée, donc les sous-espaces propres sont orthogonaux.

On a obtenu pour $\lambda = 1$ que $X \in E(1, A) \iff X \in (\text{vect}(C))^\perp$, donc

$E(1, A) = (\text{vect}(C))^\perp$

Il en résulte que le sous-espace propre $E(\lambda, A)$ pour $\lambda \neq 1$ est $\left((\text{vect}(C))^\perp\right)^\perp = \text{vect}(C)$.

On obtenait alors la valeur de λ comme nous l'avons fait ci-dessus.

$$\text{En résumé, } E(\lambda, A) = \begin{cases} (\text{vect}(C))^\perp & \text{si } \lambda = 1 \\ \text{vect}(C) & \text{si } \lambda = 1 - ||C||^2 \end{cases}$$

2)

Raisonnons sur les valeurs propres.

- f est orthodiagonalisable et possède deux valeurs propres et deux sous-espaces propres supplémentaires (orthogonaux).

f est une symétrie si et seulement si l'une des valeurs propres vaut 1 et l'autre -1. La symétrie se fait par rapport au sous-espace propre associé à la valeur 1 et suivant la direction du sous-espace propre associé à la valeur -1 (ici orthogonalement).

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

f est une symétrie si et seulement si $1-||C||^2=-1$ donc si et seulement si $||C||=\sqrt{2}$
Dans ces conditions, f est la symétrie orthogonale par rapport à $(\text{vect}(C))^\perp$.

3)

- f est une projection (orthogonale) si et seulement si elle admet 0 et 1 comme valeurs propres, donc si et seulement si $1-||C||^2=0$, donc si et seulement si $||C||=1$.

Dans ces conditions, f est une projection orthogonale sur $(\text{vect}(C))^\perp$.

4–a)

- Première méthode.

Considérons φ l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ \varphi(u)=x-y+z-t$. Il est immédiat que $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4,\mathbb{R})$. En effet, si nous notons e_1,e_2,e_3,e_4 la base canonique de $\mathbb{R}^4$, il vient

$\varphi(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)=x\varphi(e_1)+y\varphi(e_2)+z\varphi(e_3)+t\varphi(e_4)$.

L'application φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$, non nulle. Son image $\text{Im}\,\varphi$ est un sous-espace non nul de $\mathbb{R}$ dont la dimension vaut 1 ; il en résulte que $\text{Im}\,\varphi=\mathbb{R}$: $\dim\text{Im}\,\varphi=1$.
Le théorème du rang donne $\dim\text{Ker}\,\varphi=3$.

Or $\text{Ker}\,\varphi=\{u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x-y+z-t=0\}=H$.

La dimension de H vaut 3.

- Deuxième méthode.

$$\begin{aligned}H&=\{u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ /\ x=y-z+t\}\\&=\{u=(y-z+t,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,(y,z,t)\in\mathbb{R}^3\}\\&=\{u=y(1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(1,0,0,1)\in\mathbb{R}^4,(y,z,t)\in\mathbb{R}^3\}\end{aligned}$$

Posons $u_1=(1,1,0,0),\ u_2=(-1,0,1,0)$ et $u_3=(1,0,0,1)$.

$$H=\text{vect}(u_1,u_2,u_3).$$

La famille (u_1,u_2,u_3) est libre. En effet, soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\ /\ au_1+bu_2+cu_3=(0,0,0,0)$. Cette égalité équivaut à

$$\begin{cases}a-b+c&=0\\a&=0\\b&=0\\c&=0\end{cases}\text{ ce qui donne } a=b=c=0.$$

Donc la famille (u_1,u_2u_3) est une base de H.

4–b)

- La valeur α est atteinte pour V, projeté orthogonal de U sur H.
- Remarquons que le vecteur C est normé : $||C||^2=\frac{1}{4}(1+1+1+1)=1$.

Notons $c=\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\in\mathbb{R}^4$. Remarquons que $H=(\text{vect}(c))^\perp$: en effet soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tCX=\frac{1}{2}(x-y+z-t)$. Donc $u=(x,y,z,t)\in H\iff u\perp c$.

D'après la question 3–b), la matrice $B=I_4-C{}^tC$ est celle de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur H.

$$\begin{aligned}V&=BU\\&=U-C{}^tCU\\&=U-({}^tCU)C&&\text{car } {}^tCU\in\mathbb{R},\text{ donc}\\&=U-C&&\text{car } {}^tCU=1\end{aligned}$$

$$V=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\text{ et }\alpha=||U-V||=||C||=1.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4–c)

Il suffit de calculer $B = I_4 - C^tC$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021