ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−32

On rappelle que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

Montrer que la seule valeur propre réelle possible est 0.

Montrer que $P = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ existe et est orthogonale.

2) Vérifier que P n'admet pas -1 pour valeur propre.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 32

1)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un colonne propre associée. On a $AX = \lambda X$ avec $X \neq (0)$. Multiplions les deux termes par ${}^tX$, on obtient ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$

Transposons cette égalité, il vient ${}^t({}^tXAX) = \lambda {}^t({}^tXX)$, soit ${}^tX{}^tA{}^t({}^tX) = \lambda {}^tX{}^t({}^tX)$

ce qui s'écrit $-{}^tXAX = \lambda {}^tXX$, car A est antisymétrique. Or $AX = \lambda X$, donc on obtient $-\lambda {}^tXX = \lambda {}^tXX$.

La colonne X est une colonne propre, donc non nulle.

$X \neq (0) \Longrightarrow {}^tXX > 0$. On peut donc simplifier la dernière égalité par ${}^tXX$ et on obtient $-\lambda = \lambda$, donc $\lambda = 0$.

On conclut que -1 n'est pas valeur propre de A, donc $I_n + A$ est inversible.

Puisque 1 n'est pas valeur propre de A, $A - I_n$ est inversible, donc $I_n - A$ aussi :

$$\boxed{P = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \text{ existe}}$$

$$\begin{aligned}
{}^tP &= {}^t((I_n + A)^{-1}){}^t(I_n - A) \\
&= \left({}^t(I_n + A)\right)^{-1}(I_n + A) \qquad \text{puisque } A \text{ est antisymétrique} \\
&= (I_n - A)^{-1}(I_n + A)
\end{aligned}$$

Remarque : $(I_n - A)^{-1}$ existe effectivement puisque 1 n'est pas valeur propre de A.

Remarquons également pour la suite que $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2 = (I_n + A)(I_n - A)$

$$\begin{aligned}
{}^tPP &= \Big((I_n - A)^{-1}(I_n + A)\Big)\Big((I_n - A)(I_n + A)^{-1}\Big) \\
&= (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1} \\
&= (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} \qquad \text{d'après la remarque précédente} \\
&= I_n \times I_n = I_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{{}^tPP = I_n \text{ veut dire que la matrice } P \text{ est orthogonale}}$$

2)

-1 n'est pas valeur propre de P équivaut à dire que $P + I_n$ est inversible.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ / $(I_n + P)X = (0)$. Ceci équivaut à $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}X = -X$.

Posons $Y = (I_n + A)^{-1}X$; on a $X = (I_n + A)Y$.

L'égalité $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}X = -X$ équivaut à $(I_n - A)Y = -(I_n + A)Y$, soit $Y = -Y$ ou encore $Y = (0)$. Mais $X = (I_n + A)Y$, donc $X = (0)$

$$\boxed{\text{Conclusion : } (I_n + P)X = (0) \Longrightarrow X = (0) : -1 \text{ n'est pas valeur propre de } P}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021