ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–33

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

Si $P \in E$, on note P' le polynôme dérivé de P défini par

$$P' = \sum_{p=1}^{r} p a_p X^{p-1} \text{ si } P = \sum_{p=0}^{r} a_p X^p.$$

On admet que les règles de dérivation dans $\mathbb{C}_n[X]$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme P de E soit divisible par son polynôme dérivé P' (c'est-à-dire : il existe $Q \in E$ tel que $P = QP'$).

On pourra distinguer les cas : P est le polynôme nul, P est une constante non nulle, P est de degré 1, P est de degré supérieur ou égal à 2. Dans ce dernier cas, on cherchera une condition sur le nombre des racines distinctes de P.

2) Soit u l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{C},\ (u(P))(x) = (x^2+1)P'(x) - nxP(x)$$

Montrer que u est un endomorphisme de E.

3) Vérifier que le complexe λ est valeur propre de u si et seulement s'il existe un polynôme non nul P tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ (x^2+1)P'(x) = (nx+\lambda)P(x) \qquad \textbf{(1)}$$

4–a) Montrer que $-in$ et in sont valeurs propres de u (avec $i^2 = -1$).

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \{in, -in\}$. Montrer que P ne peut être solution de (1) que s'il existe un entier naturel k et un polynôme $Q \in E$ tels que $\forall x \in \mathbb{C},\ P(x) = (x^2+1)^k Q(x)$.

Que devient alors l'égalité (1) ?

c) Montrer que $-i(n-2k)$ et $i(n-2k)$ sont valeurs propres de u.

d) En déduire que u est diagonalisable.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 33

Notons (0) le polynôme nul.

1)

- $P=(0) \Longrightarrow P'=(0)$: le polynôme P' divise le polynôme P car pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C},[X]$ $P=QP'$.
- Si P est une constante non nulle, alors $P'=(0)$: le polynôme P n'est pas divisible par P' car pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C},[X]$ $QP'=(0)$ or $P \neq (0)$
- Si $\deg(P)=1$, alors P' est une constante non nulle : P' divise P car $P=QP'$ avec $Q=\frac{1}{P'}P$.
- Si $\deg(P) \geq 2$.

Supposons que P' divise P, alors $\deg(P') \geq 1$. D'après le théorème de d'Alembert, le polynôme P' a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$.

$*$ Si l'on note k l'ordre de multiplicité de la racine α de P'. Puisque P' divise P, alors α est une racine de P et $k+1$ est l'ordre de multiplicité de la racine α dans P.

En effet, si l'on note m l'ordre de la racine α dans P, on a

$P=(X-\alpha)^m Q$ avec $Q \in E$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

$P'=(X-\alpha)^{m-1}(mQ+(X-\alpha)Q')$.

Or $mQ(\alpha)+(\alpha-\alpha)Q'(\alpha)=mQ(\alpha) \neq 0$, ce qui prouve que l'ordre de multiplicité de α dans P' vaut $m-1$.

Donc si $m-1=k$, alors $m=k+1$.

$*$ Si l'on note $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ les racines distinctes de P' dans $\mathbb{C}$ et $k_1, \cdots, k_p$ les ordres de multiplicité respectifs de ces racines dans P', alors $\deg(P')=k_1+\ldots+k_p$; $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ sont racines de P avec $k_1+1, \cdots, k_p+1$ pour ordres de multiplicité respectifs dans P. Il s'ensuit que $\deg(P) \geq k_1+\ldots+k_p+p$, soit $\deg(P) \geq \deg(P')+p$.

Il y a inégalité car on est sûr que P admet $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ mais il en admet peut-être d'autres, en particulier des racines simples (qui ne sont pas racines de P').

Mais $\deg(P)=\deg(P')+1$, donc ceci impose $p=1$.

Si P' divise P, alors P a une seule racine.

Réciproquement, si P a une seule racine (et $\deg(P) \geq 2$), alors P' divise P de manière évidente.

$$\boxed{P' \text{ divise } P \text{ si et seulement si } P \text{ est le polynôme nul ou } P \text{ a une seule racine}}$$

2)

- Linéarité de u.

$\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
(u(P+\alpha Q))(x) &= (x^2+1)(P+\alpha Q)'(x) - nx(P+\alpha Q)(x)\\
&= (x^2+1)(P'(x)+\alpha Q'(x)) - nxP(x) - nx\alpha Q(x)\\
&\quad \text{d'après les règles de dérivation rappelées}\\
&= (x^2+1)P'(x) - nxP(x) + \alpha((x^2+1)Q(x) - nxQ(x))\\
&= (u(P))(x) + \alpha(u(Q))(x) = (u(P)+\alpha u(Q))(x)
\end{aligned}$$

Donc $u(P+\alpha Q)=u(P)+\alpha u(Q)$: u est linéaire.

- $u(P) \in E$.

Soit $P \in E$; il existe $(a_n, \cdots, a_0) \in (\mathbb{C})^{n+1}$ tels que $P=\sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.

On ne suppose pas ici que le degré de P vaut n ; on utilise le fait que $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de E.

Le terme de plus haut degré de $(X^2+1)P'$ est en X^{n+1} et vaut na_nX^{n+1} ; celui de nXP est aussi en X^{n+1} et vaut na_nX^{n+1}. Ces deux termes disparaissent et finalement les termes de $(X^2+1)P' - nXP$ ont un degré qui ne dépasse pas n.

$$\forall P \in E,\ u(P) \in E$$

$$\boxed{\text{L'application } u \text{ est linéaire de } E \text{ dans } E \text{ : c'est un endomorphisme de } E}$$

3)

Le complexe λ est valeur propre de u si et seulement si il existe un polynôme P non nul dans E tel que : $u(P) = \lambda P$. cela se traduit par

$(X^2+1)P' - nXP = \lambda P$ soit aussi $(X^2+1)P' = (nX+\lambda)P$

$$\boxed{\begin{array}{c}\lambda \in \mathbb{C} \text{ valeur propre de } u \text{ équivaut à} \\ \exists\, P \neq (0) \in E \ / \ \forall x \in \mathbb{C},\ (x^2+1)P'(x) = (nx+\lambda)P(x) \qquad \textbf{(1)}\end{array}}$$

4–a)

- Prenons, par exemple, $\lambda = -ni$ et testons si $-ni$ est valeur propre de u.

L'égalité (1) appliquée à $\lambda = ni$ donne $(X^2+1)P' = n(X-i)P$, soit $(X+i)(X-i)P' = n(X-i)P$ et, puisque que le polynôme $(X-i)$ n'est pas le polynôme nul, on a : $(X+i)P' = nP$.

On conclut que P' divise P, $-i$ est racine de P, donc, d'après la première question, P a une seule racine $-i$ puisque $(X+i)$ divise P.

Le polynôme $P = (X+i)^n$ convient

$-ni$ est valeur propre de u et le polynôme $(X+i)^n$ est un vecteur propre associé.

On montre de même que ni est valeur propre de u et que le polynôme $(X-i)^n$ est un vecteur propre associé.

4–b)

Ici $nX+\lambda$ n'admet ni i ni $-i$ pour racines.

Un polynôme non nul P vérifie (1) si $(X^2+1)P' = (nX+\lambda)P$. Or X^2+1 admet i et $-i$ comme racine, donc P aussi (puisque $nX+\lambda$ n'admet ni i ni $-i$ pour racines).

Donc P est divisible par $(X-i)(X+i) = X^2+1$. Désignons par k le plus grand entier tel que $(X^2+1)^k$ divise P. On a ainsi

$\exists\, Q \in E \ / \ P = (X^2+1)^kQ$ avec $\deg(Q) \leq n-2k$. L'égalité (1) devient :

$(X^2+1)(2kX(X^2+1)^{k-1}Q + (X^2+1)^kQ') = (nX+\lambda)(X^2+1)^kQ$, qui équivaut après avoir simplifié par le polynôme non nul $(X^2+1)^k$:

$2kXQ + (X^2+1)Q' = (nX+\lambda)Q$ soit finalement $\boxed{(X^2+1)Q' = ((n-2k)X+\lambda)Q \qquad \textbf{(2)}}$

4–c)

En appliquant les résultats du 4–a) à l'entier naturel $n-2k$ et au polynôme Q, on trouve que pour $\lambda = -(n-2k)i$, le polynôme $Q = (X+i)^{n-2k}$ est solution de (2)

Donc $P = (X^2+1)^k(X+i)^{n-2k}$ est solution de (1).

De même, pour $\lambda = (n-2k)i$, le polynôme $P = (X^2+1)^k(X-i)^{2n-k}$ est solution de (1).

4– d)

$*$ Si n est pair, k varie entre 0 et $\frac{n}{2}$, donc k prend $\frac{n}{2}+1$ valeurs. Pour $k < \frac{n}{2}$, les valeurs propres $i(n-2k)$ et $-i(n-2k)$ sont distinctes, mais pour $k = \frac{n}{2}$ elles valent toutes les deux 0.

Il y a donc $2(\frac{n}{2}+1)-1 = n+1$ valeurs propres distinctes.

$*$ Si n est impair, k varie entre 0 et $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière du réel x). Puisque $2k$ ne peut pas être égal à n, toutes les valeurs propres sont distinctes ; il y en a donc $2(1+\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor) = 2+n-1 = n+1$.

En effet, si $n = 2j+1$, alors $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = j$, donc $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = 2j = n-1$.

L'endomorphisme u admet $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension $n+1$. u est donc diagonalisable (et les sous-espaces propres sont de dimensions 1)