ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–33

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

Si $P \in E$, on note P' le polynôme dérivé de P défini par

$$P' = \sum_{p=1}^{r} p a_p X^{p-1} \text{ si } P = \sum_{p=0}^{r} a_p X^p.$$

On admet que les règles de dérivation dans $\mathbb{C}_n[X]$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}_n[X]$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme P de E soit divisible par son polynôme dérivé P' (c'est-à-dire : il existe $Q \in E$ tel que $P = QP'$).

On pourra distinguer les cas : P est le polynôme nul, P est une constante non nulle, P est de degré 1, P est de degré supérieur ou égal à 2. Dans ce dernier cas, on cherchera une condition sur le nombre des racines distinctes de P.

2) Soit u l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ \forall x \in \mathbb{C},\ (u(P))(x) = (x^2+1)P'(x) - nxP(x)$$

Montrer que u est un endomorphisme de E.

3) Vérifier que le complexe λ est valeur propre de u si et seulement s'il existe un polynôme non nul P tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ (x^2+1)P'(x) = (nx+\lambda)P(x) \qquad \textbf{(1)}$$

4–a) Montrer que $-in$ et in sont valeurs propres de u (avec $i^2 = -1$).

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C} - \{in, -in\}$. Montrer que P ne peut être solution de (1) que s'il existe un entier naturel k et un polynôme $Q \in E$ tels que $\forall x \in \mathbb{C},\ P(x) = (x^2+1)^k Q(x)$.

Que devient alors l'égalité (1) ?

c) Montrer que $-i(n-2k)$ et $i(n-2k)$ sont valeurs propres de u.

d) En déduire que u est diagonalisable.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 33

Notons (0) le polynôme nul.

1)

- $P = (0) \Longrightarrow P' = (0)$: le polynôme P' divise le polynôme P car pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C},[X]$ $P = QP'$.
- Si P est une constante non nulle, alors $P' = (0)$: le polynôme P n'est pas divisible par P' car pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C},[X]$ $QP' = (0)$ or $P \neq (0)$
- Si $\deg(P) = 1$, alors P' est une constante non nulle : P' divise P car $P = QP'$ avec $Q = \frac{1}{P'}P$.
- Si $\deg(P) \geq 2$.

Supposons que P' divise P, alors $\deg(P') \geq 1$. D'après le théorème de d'Alembert, le polynôme P' a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{C}$.

$*$ Si l'on note k l'ordre de multiplicité de la racine α de P'. Puisque P' divise P, alors α est une racine de P et $k+1$ est l'ordre de multiplicité de la racine α dans P.

En effet, si l'on note m l'ordre de la racine α dans P, on a

$P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q \in E$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

$P' = (X-\alpha)^{m-1}(mQ + (X-\alpha)Q')$.

Or $mQ(\alpha) + (\alpha - \alpha)Q'(\alpha) = mQ(\alpha) \neq 0$, ce qui prouve que l'ordre de multiplicité de α dans P' vaut $m-1$.

Donc si $m - 1 = k$, alors $m = k + 1$.

$*$ Si l'on note $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ les racines distinctes de P' dans $\mathbb{C}$ et $k_1, \cdots, k_p$ les ordres de multiplicité respectifs de ces racines dans P', alors $\deg(P') = k_1 + \ldots + k_p$; $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ sont racines de P avec $k_1 + 1, \cdots, k_p + 1$ pour ordres de multiplicité respectifs dans P. Il s'ensuit que $\deg(P) \geq k_1 + \ldots + k_p + p$, soit $\deg(P) \geq \deg(P') + p$.

Il y a inégalité car on est sûr que P admet $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ mais il en admet peut-être d'autres, en particulier des racines simples (qui ne sont pas racines de P').

Mais $\deg(P) = \deg(P') + 1$, donc ceci impose $p = 1$.

Si P' divise P, alors P a une seule racine.

Réciproquement, si P a une seule racine (et $\deg(P) \geq 2$), alors P' divise P de manière évidente.

P' divise P si et seulement si P est le polynôme nul ou P a une seule racine

2)

- Linéarité de u.

$\forall (P, Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}(u(P + \alpha Q))(x) &= (x^2+1)(P + \alpha Q)'(x) - nx(P + \alpha Q)(x) \\ &= (x^2+1)(P'(x) + \alpha Q'(x)) - nxP(x) - nx\alpha Q(x) \\ &\quad \text{d'après les règles de dérivation rappelées} \\ &= (x^2+1)P'(x) - nxP(x) + \alpha((x^2+1)Q(x) - nxQ(x)) \\ &= (u(P))(x) + \alpha(u(Q))(x) = (u(P) + \alpha u(Q))(x)\end{aligned}$$

Donc $u(P + \alpha Q) = u(P) + \alpha u(Q)$: u est linéaire.

- $u(P) \in E$.

Soit $P \in E$; il existe $(a_n, \cdots, a_0) \in (\mathbb{C})^{n+1}$ tels que $P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On ne suppose pas ici que le degré de P vaut n ; on utilise le fait que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de E.

Le terme de plus haut degré de $(X^2+1)P'$ est en X^{n+1} et vaut na_nX^{n+1} ; celui de nXP est aussi en X^{n+1} et vaut na_nX^{n+1}. Ces deux termes disparaissent et finalement les termes de $(X^2+1)P' - nXP$ ont un degré qui ne dépasse pas n.

$$\forall P \in E,\ u(P) \in E$$

L'application u est linéaire de E dans E : c'est un endomorphisme de E

3)

Le complexe λ est valeur propre de u si et seulement si il existe un polynôme P non nul dans E tel que : $u(P) = \lambda P$. cela se traduit par

$(X^2+1)P' - nXP = \lambda P$ soit aussi $(X^2+1)P' = (nX+\lambda)P$

$\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de u équivaut à

$\exists\, P \neq (0) \in E\ /\ \forall x \in \mathbb{C},\ (x^2+1)P'(x) = (nx+\lambda)P(x)$ **(1)**

4–a)

- Prenons, par exemple, $\lambda = -ni$ et testons si $-ni$ est valeur propre de u.

L'égalité (1) appliquée à $\lambda = ni$ donne $(X^2+1)P' = n(X-i)P$, soit $(X+i)(X-i)P' = n(X-i)P$ et, puisque que le polynôme $(X-i)$ n'est pas le polynôme nul, on a : $(X+i)P' = nP$.

On conclut que P' divise P, $-i$ est racine de P, donc, d'après la première question, P a une seule racine $-i$ puisque $(X+i)$ divise P.

Le polynôme $P = (X+i)^n$ convient

$-ni$ est valeur propre de u et le polynôme $(X+i)^n$ est un vecteur propre associé.

On montre de même que ni est valeur propre de u et que le polynôme $(X-i)^n$ est un vecteur propre associé.

4–b)

Ici $nX+\lambda$ n'admet ni i ni $-i$ pour racines.

Un polynôme non nul P vérifie (1) si $(X^2+1)P' = (nX+\lambda)P$. Or X^2+1 admet i et $-i$ comme racine, donc P aussi (puisque $nX+\lambda$ n'admet ni i ni $-i$ pour racines).

Donc P est divisible par $(X-i)(X+i) = X^2+1$. Désignons par k le plus grand entier tel que $(X^2+1)^k$ divise P. On a ainsi

$\exists\, Q \in E\ /\ P = (X^2+1)^k Q$ avec $\deg(Q) \leq n-2k$. L'égalité (1) devient :

$(X^2+1)(2kX(X^2+1)^{k-1}Q + (X^2+1)^k Q') = (nX+\lambda)(X^2+1)^k Q$, qui équivaut après avoir simplifié par le polynôme non nul $(X^2+1)^k$:

$2kXQ + (X^2+1)Q' = (nX+\lambda)Q$ soit finalement $(X^2+1)Q' = ((n-2k)X+\lambda)Q$ **(2)**

4–c)

En appliquant les résultats du 4–a) à l'entier naturel $n-2k$ et au polynôme Q, on trouve que pour $\lambda = -(n-2k)i$, le polynôme $Q = (X+i)^{n-2k}$ est solution de (2)

Donc $P = (X^2+1)^k(X+i)^{n-2k}$ est solution de (1).

De même, pour $\lambda = (n-2k)i$, le polynôme $P = (X^2+1)^k(X-i)^{2n-k}$ est solution de (1).

4– d)

$*$ Si n est pair, k varie entre 0 et $\frac{n}{2}$, donc k prend $\frac{n}{2}+1$ valeurs. Pour $k < \frac{n}{2}$, les valeurs propres $i(n-2k)$ et $-i(n-2k)$ sont distinctes, mais pour $k = \frac{n}{2}$ elles valent toutes les deux 0.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Il y a donc $2(\frac{n}{2}+1)-1=n+1$ valeurs propres distinctes.

* Si n est impair, k varie entre 0 et $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ (où $\lfloor x\rfloor$ est la partie entière du réel x). Puisque $2k$ ne peut pas être égal à n, toutes les valeurs propres sont distinctes ; il y en a donc $2(1+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor)=2+n-1=n+1$.

En effet, si $n=2j+1$, alors $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor=j$, donc $2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor=2j=n-1$.

L'endomorphisme u admet $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension $n+1$.

u est donc diagonalisable (et les sous-espaces propres sont de dimensions 1)

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021