ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–35

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $||\ ||$ la norme associée.

L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre p.

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

On dit qu'une matrice est positive si elle est symétrique et si $\langle AC, C\rangle \geq 0$ pour toute colonne $C \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^p$.

1) Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ fixée ; on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est A. Si λ est une valeur propre de A, on note p_λ le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^p$ sur le sous-espace propre $E(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$.

a) Justifier les propriétés suivantes :

- $p_{\lambda_1} \circ p_{\lambda_2} = 0$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
- $\displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(A)} p_\lambda = \mathrm{Id}\,.$

b) Montrer que l'endomorphisme $v = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, p_\lambda$ vérifie $v \circ v = u$.

En déduire que la matrice R associée à v est solution de l'équation $X^2 = A$.

c) Soit Y une matrice positive telle que $Y^2 = A$. On note w l'endomorphisme canoniquement associé à Y. Montrer que $\sigma(Y) = \{\sqrt{\lambda},\ \lambda \in \sigma(A)\}$.

Prouver ensuite que si $\lambda \in \sigma(A)$, on a $F_{\sqrt{\lambda}} = \mathrm{Ker}(w - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}) \subset E(\lambda)$.

En déduire que $w = v$, puis qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On définit ainsi la racine carrée de la matrice positive A et on la note $\sqrt{A}$.

d) Montrer que la matrice $\sqrt{A}$ commute avec A.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 35

1)

Sens direct : soit λ une valeur propre de A ; il existe une colonne $Y \neq (0)$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que $AY = \lambda Y$.

$\langle AY, Y\rangle = \langle \lambda Y, Y\rangle = \lambda ||Y||^2$. Puisque $Y \neq (0)$, alors $||Y||^2 > 0$.

L'égalité précédente devient $\lambda = \dfrac{\langle AY, Y\rangle}{||Y||^2} \geq 0$ puisque A est une matrice positive.

Sens réciproque : notons $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ le spectre de A, noté $\sigma(A)$ dans l'énoncé. Notons $F(\lambda_i)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i, c'est-à-dire $F(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$.

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable et on a donc :

$$\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{r} F(\lambda_i).$$

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ \exists (Y_1, \ldots, Y_r) \in F(\lambda_1) \times \ldots \times F(\lambda_r)\ /\ Y = \sum_{i=1}^{r} Y_i.$$

$$AY = A(\sum_{i=1}^{r} Y_i) = \sum_{i=1}^{r} AY_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i.$$

Puisque les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, on a :

$\forall (i,j) \in ([\![1, r]\!])^2,\ i \neq j \Longrightarrow \langle Y_i, Y_j\rangle = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\langle AY, Y\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i, \sum_{i=1}^{r} Y_i\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq r} \langle \lambda_i Y_i, Y_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle Y_i, Y_i\rangle\end{aligned}$$

$$\langle AY, Y\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i ||Y_i||^2 \geq 0 \text{ puisque les valeurs propres sont } \geq 0.$$

> Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, telle que A soit symétrique : A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles

2–a)

On sait que $E = \mathbb{R}^p = \bigoplus_{i=1}^{r} E(\lambda_i)$ et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux,

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, notons $E_k = \bigoplus_{i \neq k} E(\lambda_i)$. Alors E_k est le sous-espace orthogonal supplémentaire de $E(\lambda_k)$. En effet, il est clair que $E(\lambda_k)$ et E_k sont supplémentaires puisque la mise bout à bout d'une base de $E(\lambda_k)$ et de E_k est en fait la mise bout à bout d'une base de $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_r)$ donc c'est une base de E.

D'autre part, $E(\lambda_k)$ est orthogonal à tous les $E(\lambda_i)$ pour $i \neq k$, donc par linéarité du produit scalaire, il est orthogonal à leur somme, E_k.

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \exists (x_1, \ldots, x_r) \in E(\lambda_1) \times \ldots \times E(\lambda_r)\ /\ x = \sum_{i=1}^{r} x_i = x_k + \sum_{i \neq k} x_i$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Donc $p_{\lambda_k}(x) = x_k$ puisque $\sum_{i\neq k} x_i \in E_k$

Considérons $j \neq k$, alors $x_k \in E_j = \bigoplus_{i\neq j} E(\lambda_i)$, car E_j contient $E(\lambda_k)$; par conséquent $P_{\lambda_j}(x_k) = 0$.

Ceci montre que : $\forall x \in \mathbb{R}^p,\ p_{\lambda_j} \circ p_{\lambda_k}(x) = 0$.

$$\boxed{\forall (k,j) \in (\llbracket 1, r \rrbracket)^2,\ k \neq j \Longrightarrow p_{\lambda_j} \circ p_{\lambda_k} = 0}$$

On vient de voir que $\forall x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i = p_{\lambda_i}(x)$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^p,\ x = \sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i}(x) = (\sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i})(x) \ : \ \sum_{i=1}^{r} p_{\lambda_i} = \mathrm{Id}_E}$$

2–b)

Soit $v = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i}$.

$$\begin{aligned} v \circ v &= (\sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i}) \circ (\sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i}) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq r} \sqrt{\lambda_i} p_{\lambda_i} \circ \sqrt{\lambda_j} p_{\lambda_j} \\ &= \sum_{i=1}^{r} (\sqrt{\lambda_i})^2 (p_{\lambda_i})^2 \qquad \text{car } p_{\lambda_i} \circ p_{\lambda_j} = 0 \text{ pour } i \neq j \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i} \qquad \text{car } p_{\lambda_i} \text{ est un projecteur} \end{aligned}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^p,\ x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E(\lambda_i)$, donc par linéarité,

$u(x) = \sum_{i=1}^{r} u(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i}(x) = (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i})(x)$, donc $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i}$

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i} = v \circ v \Longrightarrow v^2 = u}$$

Il est clair que si R est la matrice de v, on a : $R^2 = A$, donc R est solution de l'équation $X^2 = A$.

2–c)

Notons $\sigma(w) = \{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$ le spectre de w.

C'est un résultat classique que μ_i valeur propre de w implique μ_i^2 valeur propre de w^2, donc μ_i^2 est valeur propre de u. Si on note $\sigma(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, on conclut :

$\forall \mu_i \in \sigma(w),\ \exists\, \lambda_j \in \sigma(u)\ /\ \mu_i^2 = \lambda_j$. L'endomorphisme w est symétrique, positif, donc $\mu_i \geq 0$ et il en résulte que $\mu_i = \sqrt{\lambda_j}$.

$$\boxed{\sigma(w) \subset \{\sqrt{\lambda_i}\ /\ \lambda_i \in \sigma(u)\} \qquad \textbf{(1)}}$$

Réciproquement, la matrice Y est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée (d'ailleurs). Notons $\beta_1, \ldots, \beta_p$ les valeurs propres de ω non nécesssairement dictinctes.

Il existe une matrice P orthogonale telle que ${}^tPYP = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots \beta_p)$ où $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\} = \sigma(Y) = \sigma(w)$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$^tP(\text{diag}\,(\beta_1,\ldots,\beta_p)^2P = Y^2 = A \text{ ou encore } A = P(\text{diag}\,(\beta_1^2,\ldots,\beta_p^2))^tP.$$

Ceci permet de dire $\sigma(u) = \{\beta_1^2,\ldots,\beta_p^2\} = \{\mu_1^2,\ldots\mu_s^2\}$

Donc $\forall\lambda_i \in \sigma(u) = \sigma(A),\ \exists\,\mu_j^2\ /\ \lambda_i = \mu_j^2$, donc $\sqrt{\lambda_i} = \mu_j$.

On a :

$$\boxed{\{\sqrt{\lambda_i}\ /\ \lambda_i \in \sigma(u)\} \subset \sigma(\omega) \qquad \textbf{(2)}}$$

Finalement, d'après les résultats **(1)** et **(2)**, on a montré :

$$\boxed{\sigma(Y) = \sigma(\omega) = \{\sqrt{\lambda_i}\ /\ \lambda_i \in \sigma(A)\}}$$

- Soit $\lambda \in \sigma(A) = \sigma(u)$ et $x \in F_{\sqrt{\lambda}}$. On a

$w(x) = \sqrt{\lambda}x$, donc $w^2(x) = \lambda x$ ce qui donne $u(x) = \lambda x$ puisque $w^2 = u$. Donc $x \in E(\lambda)$.

$$F_{\sqrt{\lambda}} \subset E(\lambda)$$

L'endomorphisme w est diagonalisable car sa matrice Y est symétrique réelle.

Donc $\dim\mathbb{R}^p = \displaystyle\sum_{\sqrt{\lambda}\in\sigma(Y)} \dim F_{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \dim F_{\sqrt{\lambda}}$.

De même $\dim\mathbb{R}^p = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(A)} \dim E(\lambda)$.

Or $\text{Card}(\sigma(A)) = \text{Card}(\sigma(Y)) = r$ puisque nous avons posé $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$. Les égalités précédentes peuvent s'écrire :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} = p = \sum_{i=1}^{r} \dim E(\lambda_i)$.

De plus, $\forall i \in [\![1,r]\!],\ F_{\sqrt{\lambda_i}} \subset E(\lambda_i) \Longrightarrow \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} \leq \dim E(\lambda_i)$.

Si l'on suppose qu'il existe un indice $j \in [\![1,r]\!]$ tel que $\dim F_{\sqrt{\lambda_j}} < \dim E(\lambda_j)$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim F_{\sqrt{\lambda_i}} < \sum_{i=1}^{r} \dim E(\lambda_i)$, ce qui est contradictoire.

Conclusion : $\forall i \in [\![1,r]\!],\ F_{\sqrt{\lambda_i}} \subset E(\lambda_i)$ et $\dim F_{\sqrt{\lambda_i}} = \dim E(\lambda_i)$ impliquent $F_{\sqrt{\lambda_i}} = E(\lambda_i)$

$$\textbf{Pour tout } \lambda \in \sigma(A),\ \text{Ker}(w - \sqrt{\lambda}\,\text{Id}) = \text{Ker}(u - \lambda\,\text{Id})$$

D'après le même raisonnement de la question 2–b) où l'on a montré que $u = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(u)} \lambda p_\lambda$, on montrera que $w = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda}p_{\sqrt{\lambda}} = \sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda}p_\lambda$ puisque $F_{\sqrt{\lambda}} = E(\lambda)$, donc $p_{\sqrt{\lambda}} = p_\lambda$.

$$\textbf{Donc } w = \sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda}p_\lambda = v$$

L'équation $X^2 = A$ admet dans l'ensemble des matrices carrées symétriques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une solution : $v = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda}p_\lambda$. Nous venons de constater que toute autre solution w de matrice positive est égale à v :

L'équation précédente a donc une seule solution v

2–d)

On a immédiatement $u \circ w = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(u)} \sqrt{\lambda}\lambda p_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma(u)} \lambda\sqrt{\lambda}p_\lambda = u \circ w$.

$$\boxed{w \circ u = u \circ w \Longleftrightarrow \sqrt{A}A = A\sqrt{A}}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021