ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–36

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq (0)$ et $A^3 + A = (0)$.

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1) Dans cette question on suppose que A est inversible.

a) Justifier que f vérifie : $f \circ f = -\mathrm{Id}$.

b) Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si la famille $(u, v, f(u))$ est libre, alors la famille $(u, v, f(u), f(v))$ est libre aussi.

c) En déduire que n ne peut pas être égal à 3.

Dans la suite, on suppose $n = 3$.

2) On note $F = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \bigoplus F$.

b) Montrer que F est stable par f et que $\dim(F) \neq 1$.

c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

3–a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$, e_2 un vecteur non nul de F et $e_3 = f(e_2)$. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

b) Exprimer la matrice B de f dans cette base.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 36

1–a)

Si A est inversible, alors on multiplie l'égalité $A^3 + A = (0)$ par A^{-1} (peut importe le côté) ; on obtient $A^2 + I_n = (0)$, ce qui se traduit par $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1–b)

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ au + bv + cf(u) + df(v) = 0_E$ **(1)**

Prenons l'image par f et tenons compte du fait que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$; on obtient $-cu - dv + af(u) + bf(v) = 0_E$. Finalement on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} au + bv + cf(u) + df(v) & = 0_E \\ -cu - dv + af(u) + bf(v) & = 0_E \end{cases}$$

- Supposons $d \neq 0$. Et effectuons $L_2 \longleftarrow dL_2 - bL_1$. On a le système équivalent :

$$\begin{cases} au + bv + cf(u) + df(v) & = 0_E \\ -(ab + dc)u - (b^2 + d^2)v + (ad - cb)f(u) & = 0_E \end{cases}$$

Puisque la famille $(u, v, f(u))$ est libre, la deuxième équation donne $ab+dc = 0$, $b^2+d^2 = 0$ et $ad - bc = 0$. Or $b^2 + d^2 = 0$ est impossible dans $\mathbb{R}$. Donc on ne peut pas supposer $d \neq 0$.

- Il s'ensuit que $d = 0$ et l'équation **(1)** devient $au + bv + cf(u) = 0_E$. La famille $(u, v, f(u))$ est libre, on en déduit $a = b = c = 0$.

L'équation $au + bv + cf(u) + df(v) = 0_E$ implique $a = b = c = d = 0$: la famille $(u, v, f(u), f(v))$ est libre.

1–c)

L'endomorphisme f est bijectif, donc il n'admet pas 0 pour valeur propre. Or $A^3 + A = (0)$ implique que le polynome $X^3 + X$ est annulateur de f. Les éventuelles valeurs propres réelles de f sont racines réelles de P, c'est-à-dire 0. Donc f n'a pas de valeurs propres réelles.

Soit $u \neq 0_E$; $(u, f(u))$ est libre, sinon $f(u)$ serait colinéaire à u, ce qui voudrait dire que u est vecteur propre de f, ce qui n'est pas possible.

Si $n = 3$, on peut compléter cette famille libre par un autre vecteur v tel que $(u, v, f(u))$ soit une base de E (théorème de la base incomplète), donc une famille libre. D'après la question précédente, la famille $(u, v, f(u), f(v))$ est libre, ce qui est impossible.

Conclusion : la dimension n de E ne peut pas être égale à 3 quand A est inversible

2–a)

Remarquons que $A^3 + A = (0) \Longleftrightarrow f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit $u \in E$. Supposons qu'il existe $(v, w) \in \operatorname{Ker} f \times F \ / \ u = v + w$.

Prenons l'image par f. On obtient $f(u) = f(v) + f(w) = f(w)$ (car $v \in \operatorname{Ker} f$).

Mais $w \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, donc $w = -f^2(w)$. Or $f^2(u) = f^2(\omega)$, donc $f^2(u) = f^2(w) = -w$.

On en déduit que $v = u - w = u + f^2(u)$.

Conclusion : s'il existe $(v, w) \in \operatorname{Ker} f \times F \ / \ u = v + w$, alors v et ω sont uniques et donnés par $w = -f^2(u)$ et $v = u + f^2(u)$.

Synthèse : soit $u \in E$; considérons les vecteurs $w = -f^2(u)$ et $v = u + f^2(u)$.

Il est clair que $u = v + w$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$f(v) = f(u) + f^3(u) = 0_E$ puisque $f^3 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$: $f \in \operatorname{Ker} f$.

$f^2(w) = -f^4(u) = -f^3(f(u)) = f(f(u)) = f^2(u) = -w$: donc $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(w) = 0_E$: $w \in F$.

$$\forall u \in E,\ \exists!(v, w) \in \operatorname{Ker} f \times F \ / \ u = v + w.$$

Cela veut dire que $\operatorname{Ker} f$ et F sont supplémentaires dans E.

2–b)

Soit $x \in F$, alors $f^2(x) + x = 0_E$. Il s'ensuit que :

$f(f^2(x) + x) = 0_E$ ou encore $(f^2 + \mathrm{Id}_E)(f(x)) = 0_E$. Cela veut dire que $f(x) \in F$.

F est stable par f.

Si $\dim F = 1$, alors il existe $e \in E$ / $F = \mathrm{vect}(e)$. Par stabilité, $f(e) \in F$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ / $f(e) = \lambda e$. **Le vecteur e serait vecteur propre de f.**

Or $A^3 + A = (0)$ implique que le polynome $X^3 + X$ est annulateur de f. Les éventuelles valeurs propres de f sont racines de P. Dans $\mathbb{R}$, P n'admet qu'une racine : 0. On aurait donc que e est vecteur propre associé à la valeur propre 0, donc e serait dans $\operatorname{Ker} f$. Il serait dans $\operatorname{Ker} f \cap F$, et par conséquent il serait nul puisque $\operatorname{Ker} f$ et F sont supplémentaires. Ce qui est impossible car (e) est une base de F.

Conclusion : la dimension de F n'est pas égale à 1

2–c)

On a $\dim \operatorname{Ker} f + \dim F = 3$, donc $\dim \operatorname{Ker} f \neq 2$.

f n'est pas nul, donc $\dim \operatorname{Ker} f \neq 3$. Il reste $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ ou 1.

Si $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, alors d'après la question 1), on ne peut avoir $n = 3$. Donc $\dim \operatorname{Ker} f \neq 0$.

Conclusion : $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

3–a)

Soit e_1 une base de $\operatorname{Ker} f$. Le vecteur e_3 appartient à F puisque $e_3 = f(e_2)$, $e_2 \in F$ et F est stable par f.

La famille (e_2, e_3) est libre ; en effet, si cette famille est liée, il existe, puisque $e_2 \neq 0_E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ / $e_3 = \lambda e_2$, donc $f(e_2) = \lambda e_2$. Le vecteur e_2 est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. La seule valeur propre réelle de f est zéro. Il en résulte que $f(e_2) = 0_E$, donc e_2 est dans $\operatorname{Ker} f$. Finalement $e_2 \in \operatorname{Ker} f \cap F = \{0_E\}$ et $e_2 = 0_E$.

Mais cela est impossible puisque $e_2 \neq 0_E$ par hypothèse.

Il s'ensuit que (e_2, e_3) est une base de F, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de E puisque E et F sont supplémentaires dans E.

3–a)

Dans cette base, $f(e_1) = 0_E$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$ car $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021