ALGEBRE LINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–37

Soit a, b, c trois réels et M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $C(M) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ XM = MX\}$

1) Montrer que $C(M)$ est un espace vectoriel.

2) On suppose dans cette question que $ac > 0$.

Déterminer les éléments propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

On suppose désormais que $ac > 0$ *et* $b^2 \neq ac$.

3–a) Soit X un élément de $C(M)$. Soit λ une valeur propre de M et U un vecteur propre associé.

Montrer qu'il existe un réel α tel que $XU = \alpha U$.

b) En déduire que X est diagonalisable.

4–a) Déterminer la dimension de $C(M)$.

b) Donner une base de $C(M)$ lorsque $a = c$. L'espace $C(M)$ est-il alors constitué de matrices symétriques ?

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 37

1)

$C(M) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$C(M)$ n'est pas vide car il contient la matrice nulle (il contient aussi la matrice I_3 et la matrice M).

Soit X et X' deux matrices appartenant à $C(M)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(X+\alpha X')M &= XM + \alpha X'M \\ &= MX + \alpha MX' \quad \text{puisque } X \text{ et } X' \text{ sont dans } C(M) \\ &= M(X+\alpha X')\end{aligned}$$

Donc $X+\alpha X'$ appartient à $C(M)$. On conclut que $C(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; λ est valeur propre de M si et seulement si le système $(M-\lambda I_3)Y = (0)$ n'est pas de Cramer $\left(Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$

$$(M-\lambda I_3)Y = (0) \iff \begin{cases} -\lambda x + cz &= 0 \\ (b-\lambda)y &= 0 \\ ax - \lambda z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax - \lambda z &= 0 \\ (b-\lambda)y &= 0 \\ -\lambda x + cz &= 0 \end{cases}$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} ax - \lambda z &= 0 \\ (b-\lambda)y &= 0 \\ (ac-\lambda^2)z &= 0 \end{cases}$$

$$L_3 \longleftarrow aL_3 + \lambda L_1$$

Cette dernière opération est licite puisque $ac > 0 \Longrightarrow a \neq 0$.

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $\lambda = b$ ou $\lambda^2 = ac$. Donc

$$\boxed{\text{spect}(M) = \{b, -\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\}}$$

Il est clair que $ac > 0 \Longrightarrow -\sqrt{ac} \neq \sqrt{ac}$. Il faut donc considérer les deux cas : $b \notin \{-\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\}$ ou $b \in \{-\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\}$.

- Si $b \notin \{-\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\}$, M admet 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Remarquons que $b \notin \{-\sqrt{ac}, \sqrt{ac}\} \iff b^2 \neq ac$.

Notons, d'une manière générale, $E(\lambda, M)$ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ. Considérons $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$* \quad Y \in E(b,M) \iff \begin{cases} ax - bz &= 0 \\ (ac-b^2)z &= 0 \end{cases} \iff z = 0,\ x = 0,\ y \in \mathbb{R} \text{ puisque } ac - b^2 \neq 0$$

ainsi que a.

$$E(b,M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$$* \quad Y \in E(\sqrt{ac},M) \iff \begin{cases} ax - \sqrt{ac}z &= 0 \\ (b-\sqrt{ac})y &= 0 \end{cases} \iff y = 0,\ \sqrt{a}x - \sqrt{c}z = 0 \text{ car } b - \sqrt{ac} \neq 0.$$

$$E(\sqrt{ac},M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}\right).$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$*\quad Y \in E(-\sqrt{ac},M) \iff \begin{cases} ax & +\sqrt{ac}z & = 0 \\ & (b+\sqrt{ac})y & = 0 \end{cases} \iff y=0,\ \sqrt{a}x+\sqrt{c}z=0 \text{ car } b+\sqrt{ac}\neq 0.$

$E(-\sqrt{ac},M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}\right).$

La matrice M est diagonalisable

$\bullet\bullet$ Si $b=\sqrt{ac}$; alors $b^2=ac$.

$*\quad Y \in E(\sqrt{ac},M) \iff ax-\sqrt{ac}z=0 \iff z=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}x,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$

$$Y=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E(\sqrt{ac},M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right). \qquad \dim E(\sqrt{ac},M)=2.$

$*\quad Y \in E(-\sqrt{ac},M) \iff \begin{cases} ax+\sqrt{ac}z & = 0 \\ 2\sqrt{ac}y & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{a}x+\sqrt{c}z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}$

$E(-\sqrt{ac},M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}\right).$

La matrice M est diagonalisable

$\bullet\bullet\bullet$ Si $b=-\sqrt{ac}$; alors $b^2=ac$.

Un calcul tout-à-fait analogue donnera

$E(\sqrt{ac},M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}\right).$

$E(-\sqrt{ac},M) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{c} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right). \qquad \dim E(\sqrt{ac},M)=2.$

La matrice M est diagonalisable

3–a)

Nous sommes dans le cas où $\text{Card}(\text{spect}(M))=3$; les trois sous-espaces propres sont de dimensions 1.

Soit $X \in C(M)$.

Soit $\lambda \in \text{spect}(M)$ et U une colonne propre associée. Il en résulte que $E(\lambda,M)=\text{vect}(U)$. $MU=\lambda U \Longrightarrow XMU=X(\lambda U)=\lambda XU$. Or $XM=MX$, donc $XMU=MXU$ et on obtient l'égalité $M(XU)=\lambda(XU)$. La colonne XU (qui n'est peut-être pas une colonne propre - elle peut être nulle) appartient à $E(\lambda,M)=\text{vect}(U)$. Donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $XU=\alpha U$.

Le vecteur U est vecteur propre de X

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3–b)

Notons $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ les trois valeurs propres de M et U_1, U_2, U_3 trois vecteurs propres associés.

La famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puisque M est diagonalisable. Si nous notons α_i la valeur propre de X associée à U_i $(1 \leq i \leq 3)$, alors (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de X.

La matrice X est diagonalisable

4–a)

Notons P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)P^{-1}$ (on exprime ainsi que M est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base formée de vecteurs propres de M).

Avec les notations précédentes, $X \in C(M) \Longrightarrow X = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P^{-1}$.

Réciproquement, soit $\beta_1\beta_2, \beta_3$ trois réels et $Z = P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)P^{-1}$.

$ZM = P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)P^{-1}P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\beta_1\lambda_1, \beta_2\lambda_2, \beta_3\lambda_3)P^{-1}$

$MZ = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)P^{-1}P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1\beta_1, \lambda_2\beta_2, \lambda_3\beta_3)P^{-1}$

Donc $ZM = MZ$

Conclusion :

$$\begin{aligned} C(M) &= \{P\,\mathrm{Diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)P^{-1},\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{vect}(P\,\mathrm{Diag}(1,0,0)P^{-1}, P\,\mathrm{Diag}(0,1,0)P^{-1}, P\,\mathrm{Diag}(0,0,1)P^{-1}) \end{aligned}$$

L'application φ définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \varphi(T) = PTP^{-1}$ est manifestement un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La linéarité ne pose aucun problème et $\varphi(T) = (0) \Longleftrightarrow T = (0)$. L'endomorphisme φ est un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie 9, c'est donc un automorphisme.

La famille $(\mathrm{Diag}(1,0,0), \mathrm{Diag}(0,1,0), \mathrm{Diag}(0,0,1))$ est une famille libre en tant que sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Donc la famille $\Big(\varphi(\mathrm{Diag}(1,0,0)), \varphi(\mathrm{Diag}(0,1,0)), \varphi(\mathrm{Diag}(0,0,1))\Big)$ l'est également.

$(P\,\mathrm{Diag}(1,0,0)P^{-1}, P\,\mathrm{Diag}(0,1,0)P^{-1}, P\,\mathrm{Diag}(0,0,1)P^{-1})$
est une base de $C(M)$: $\dim C(M) = 3$

4–b)

Si $a = c$, la matrice M est symétrique. On peut choisir P orthogonale, c'est-à-dire telle que $P^{-1} = {}^tP$

Soit $X \in C(M)$; $X = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^tP$

${}^tX = {}^t({}^tP)^t\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^tP = P\,\mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^tP = X$

$C(M)$ est formé de matrices symétriques

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021