ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−29

1) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0) \Longleftrightarrow (\exists\,(R,S) \in (\mathbb{R}[X])^2\ /\ P = R^2 + S^2)$

Ind : on pourra décomposer P dans $\mathbb{C}_2[X]$

2) Généralisation : soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0) \Longleftrightarrow (\exists\,(R,S) \in (\mathbb{R}[X])^2\ /\ P = R^2 + S^2)$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 29

1)

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si P a un degré égal à 1, alors il change évidemment de signe.

Si $P \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors P est une constante ou un polynôme de degré 2.

- Si P est une constante, cette constante, K est positive, donc $P = (\sqrt{K})^2 + 0^2$. $R = \sqrt{K}$ et $S = 0$ conviennent.
- Si $\deg(P) = 2$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \ / \ P = aX^2 + bX + c$.

La limite de P en $+\infty$ vaut $+\infty$, donc $a > 0$.

$P = a(X + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$.

$b^2 - 4ac \leq 0$ sinon le polynôme P aurait deux racines réelles distinctes, donc il changerait de signe. Puisque $a > 0$, alors $\frac{4ac - b^2}{4a} \geq 0$.

Posons $R = \sqrt{a}(X + \frac{b}{2a})$ et $S = \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a}}$, on a bien $P = R^2 + S^2$.

2)

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$. Alors on peut écrire $P = a_n X^n + Q$ avec $a_n \neq 0$ et $\deg(Q) \leq n - 1$.

$P(x) \underset{(|x| \to +\infty)}{\sim} a_n x^n$. Si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$, alors $\lim\limits_{|x| \to +\infty} a_n x^n$ vaut $+\infty$

Lorsque $x \to +\infty$, cela impose $a_n > 0$ et lorsque $x \to -\infty$ cela impose n pair.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0 \Longrightarrow P = a_{2p} X^{2p} + Q$ avec $a_{2p} > 0$ et $p \geq 0$ (notons que les cas $p = 0$ et $p = 1$ ont été traités dans la question 1).

Faisons alors une récurrence sur p

Pour $p = 0$ et $p = 1$, c'est déjà fait.

Soit $P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$ et $\deg(P) = 2p + 2$.

D'après le théorème de d'Alembert, le polynôme P admet au moins une racine $x_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$, alors cette racine est d'ordre au moins égal à 2.

En effet, si l'ordre de la racine x_0 était 1, on pourrait écrire $P = (X - x_0)Q$, avec $Q(x_0) \neq 0$. Par continuité de la fonction Q au point x_0, celle-ci garde un signe constant (celui de $Q(x_0)$) au voisinage de x_0. Donc le signe de P change au voisinage de x_0 puisque celui de $x - x_0$ change.

On peut donc écrire $P = (X - x_0)^2 Q_1$ avec $\deg(Q_1) = 2p$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, $P(x)$ et $Q_1(x)$ ont le même signe ou nuls en même temps. Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\},\ Q_1(x) \geq 0$. Par continuité au point x_0, $Q_1(x_0) \geq 0$.

Donc $\deg(Q_1) = 2p$ et $Q_1 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q_1 :

Il existe $(R_1, S_1) \in (\mathbb{R}[X])^2 \ / \ Q_1 = R_1^2 + S_1^2$.

On obtient alors $P = ((X - x_0)R_1)^2 + ((X - x_0)S_1)^2$. Les polynômes $R = (X - x_0)R_1$ et $S = (X - x_0)S_1$ conviennent.

- Si $x_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, alors $\overline{x_0}$ est aussi racine de P et on peut écrire :

$P = (X - x_0)(X - \overline{x_0})Q_2$.

Le polynôme $(X - x_0)(X - \overline{x_0})$ n'a pas de racines rélles, il garde un signe constant, celui de X^2, donc il est strictement positif.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

D'après la question 1), on peut écrire $(X - x_0)(X - \overline{x_0}) = A^2 + B^2$ où A et B sont des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Puisque $P \geq 0$ et $(X - x_0)(X - \overline{x_0}) > 0$, il s'ensuit que $Q_2 \geq 0$. De plus $\deg(Q_1) = 2p$; on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et écrire $Q_2 = C^2 + D^2$, où C et D sont des polynômes. On obtient

$$\begin{aligned} P &= (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) \\ &= A^2C^2 + A^2D^2 + B^2C^2 + B^2D^2 \\ &= (A^2C^2 + B^2D^2) + A^2D^2 + B^2C^2 \\ &= (AC + BD)^2 - 2ACBD + A^2D^2 + B^2C^2 \\ &= (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2 \end{aligned}$$

Les polynômes $R_2 = AC + BD$ et $S_2 = AD - BC$ conviennent.

La propriété est donc héréditaire et par principe de récurrence elle est vraie pour toutes les puissances (paires nécessairement) de P

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021