ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–30

Soit la suite (u_n) à termes positifs ou nuls définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = u_n^2 + 8n + 5$$

1) Déterminer u_n en fonction de n

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n = \cos(\pi u_n)$ et $b_n = \sin(\pi u_n)$

a) Montrer que $\forall n \geq 1, \exists\, \varepsilon_n\ /\ a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) ont la même limite

b) Montrer que $|\frac{\pi}{2}\varepsilon_n| \leq \frac{\pi}{64}$ et en conclure que $\forall n \geq 1,\ 0 < b_n \leq a_n < \frac{\pi}{4}$

3–a) Etudier sur $\mathbb{R}_+^*$ les variations de $\varphi\ :\ x \longmapsto x\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}$

b) En déduire que la suite (a_n) est décroissante.

4) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 30

1)

$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1}^2 - u_k^2 = 8k+5$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1}(8k+5)$$

Le terme de gauche vaut $u_n^2 - u_0^2 = u_n^2$ (par " télescopage "). Celui de droite vaut $\frac{(5+8(n-1)+5)n}{2} = n(4n+1)$ d'après la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = n(4n+1)$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n(4n+1)} \text{ car la suite } (u_n) \text{ est à termes positifs ou nuls}}$$

2–a)

$u_n^2 = 4n^2(1+\frac{1}{4n})$, donc $u_n = 2n\sqrt{1+\frac{1}{4n}} = 2n(1+\frac{1}{8n}+\frac{1}{4n}\varepsilon(n))$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$.

$\pi u_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)$. Donc

$$\boxed{\begin{array}{c} a_n = \cos(\pi u_n) = \cos(2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) \\ \text{De même } b_n = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) \end{array}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) = \frac{\pi}{4}$, donc par continuité des fonctions cos et sin au point $\frac{\pi}{4}$, on déduit que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2–b)

Etudions le signe de $\varepsilon(n)$.

D'après le développement limité précédent, $\sqrt{1+\frac{1}{4n}} = (1+\frac{1}{8n}+\frac{1}{4n}\varepsilon(n))$, donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= 4n\Big(\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - (1+\frac{1}{8n})\Big) \\ &= 4n\frac{1+\frac{1}{4n} - (1+\frac{1}{8n})^2}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+1+\frac{1}{8n}} \\ &= 4n\frac{-\frac{1}{64n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+1+\frac{1}{8n}} \end{aligned}$$

$$\varepsilon(n) = -\frac{\frac{1}{16n}}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+(1+\frac{1}{8n})} < 0$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

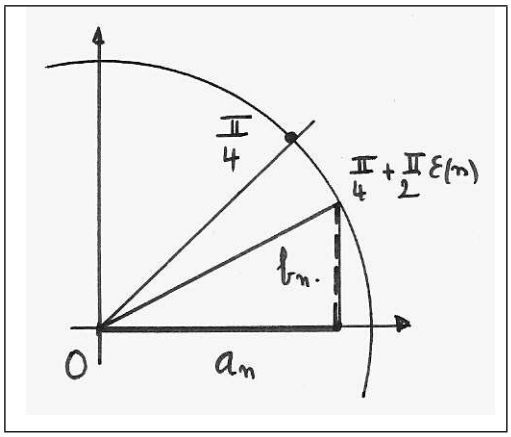
$\left|\frac{\pi}{2}\varepsilon(n)\right| = \frac{\pi}{2}\dfrac{\frac{1}{16n}}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+(1+\frac{1}{8n})} \leq \frac{\pi}{2}\dfrac{\frac{1}{16n}}{2} = \pi\frac{1}{64n}$, car $\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+(1+\frac{1}{8n}) \geq 2 > 0$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+(1+\frac{1}{8n})} \leq \frac{1}{2}$ et on multiplie cette inégalité par $\frac{\pi}{32n} > 0$.

On obtient finalement, $\left|\frac{\pi}{2}\varepsilon(n)\right| \leq \pi\frac{1}{64n} \leq \pi\frac{1}{64}$ car $n \geq 1$.

Compte tenu du signe de $\frac{\pi}{2}\varepsilon(n)$, on a l'encadrement suivant : $-\frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon(n) \leq 0$, donc

$$0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n) \leq \frac{\pi}{4}$$

Sur le cercle trigonométrique, on a la situation suivante :



Il apparaît clairement que $0 < b_n \leq a_n$**.**

3–a)

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction φ est dérivable comme produit de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ \varphi'(x) &= \sqrt{1+\frac{1}{4x}} + x\frac{-\frac{1}{4x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} \\ &= \sqrt{1+\frac{1}{4x}} + \frac{-\frac{1}{8x}}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} \\ &= \frac{1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{8x}}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} \\ &= \frac{1+\frac{1}{8x}}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} > 0\end{aligned}$$

La fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont positives, elles varient dans le mêmes sens que leurs carrés. Or la relation fondamentale $a_n^2 + b_n^2 = 1$ impose que les deux suites (a_n^2) et (b_n^2) varient en sens inverse. Si nous montrons que la suite (a_n) décroît, alors la suite (b_n) sera croissante.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Remarque : puisque $a_n \geq b_n$, si les suites sont adjacentes, alors nécessairement la suite (a_n) doit décroitre.

Puisque $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n) \in [0, \frac{\pi}{4}]$, (a_n) décroît si et seulement si $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)\right)$ croît car la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, donc si $(\varepsilon(n))$ croît, donc si et seulement si $(-\varepsilon(n))$ décroît.

Or $-\varepsilon(n) = \frac{1}{4}\dfrac{1}{4n(\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+1+\frac{1}{8n})} = \frac{1}{16}\dfrac{1}{\varphi(n)+n+\frac{1}{8}}$

La fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la suite $n \longmapsto \varphi(n)$ est croissante, donc la suite $n \longmapsto \varphi(n)+n+\frac{1}{8}$ est croissante également. Et puisque cette suite est strictement positive, son inverse $n \longmapsto \dfrac{1}{\varphi(n)+n+\frac{1}{8}}$ est décroissante.

Nous venons de montrer que la suite $(-\varepsilon(n))$ est décroissante, donc la suite $(\varepsilon(n))$ est croissante et par conséquent, la suite (a_n) est décroissante. On en conclut que la suite (b_n) est croissante.

Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement décroissante et croissante, elles ont même limite, donc elles sont adjacentes

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021