ANALYSE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−30

Soit la suite (u_n) à termes positifs ou nuls définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = u_n^2 + 8n + 5$$

1) Déterminer u_n en fonction de n

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n = \cos(\pi u_n)$ et $b_n = \sin(\pi u_n)$

a) Montrer que $\forall n \geq 1, \exists\, \varepsilon_n\ /\ a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) ont la même limite

b) Montrer que $|\frac{\pi}{2}\varepsilon_n| \leq \frac{\pi}{64}$ et en conclure que $\forall n \geq 1,\ 0 < b_n \leq a_n < \frac{\pi}{4}$

3−a) Etudier sur $\mathbb{R}_+^*$ les variations de $\varphi\ :\ x \longmapsto x\sqrt{1 + \dfrac{1}{4x}}$

b) En déduire que la suite (a_n) est décroissante.

4) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 30

1)

$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1}^2 - u_k^2 = 8k+5$. Donc

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1}(8k+5)$

Le terme de gauche vaut $u_n^2 - u_0^2 = u_n^2$ (par " télescopage "). Celui de droite vaut $\dfrac{(5+8(n-1)+5)n}{2} = n(4n+1)$ d'après la formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = n(4n+1)$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n(4n+1)} \text{ car la suite } (u_n) \text{ est à termes positifs ou nuls}}$$

2–a)

$u_n^2 = 4n^2(1+\frac{1}{4n})$, donc $u_n = 2n\sqrt{1+\dfrac{1}{4n}} = 2n(1+\dfrac{1}{8n}+\dfrac{1}{4n}\varepsilon(n))$, avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$.

$\pi u_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)$. Donc

$$\boxed{\begin{array}{c} a_n = \cos(\pi u_n) = \cos(2n\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) \\ \text{De même } b_n = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) \end{array}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)) = \frac{\pi}{4}$, donc par continuité des fonctions $\cos$ et $\sin$ au point $\frac{\pi}{4}$, on déduit que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2–b)

Etudions le signe de $\varepsilon(n)$.

D'après le développement limité précédent, $\sqrt{1+\dfrac{1}{4n}} = (1+\dfrac{1}{8n}+\dfrac{1}{4n}\varepsilon(n))$, donc

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= 4n\left(\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - (1+\frac{1}{8n}\right) \\ &= 4n\frac{1+\frac{1}{4n} - (1+\frac{1}{8n})^2}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+1+\frac{1}{8n}} \\ &= 4n\frac{-\frac{1}{64n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+1+\frac{1}{8n}} \end{aligned}$$

$$\varepsilon(n) = -\frac{\frac{1}{16n}}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+(1+\frac{1}{8n})} < 0$$

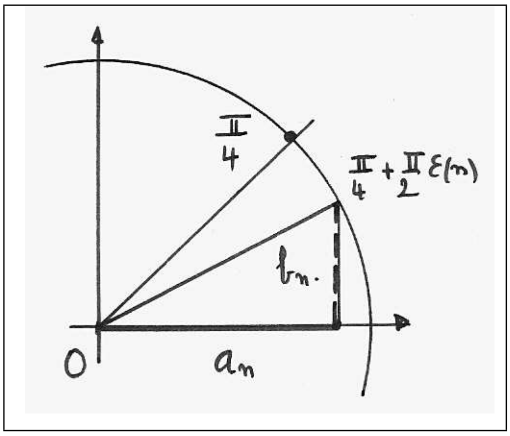
$\left|\frac{\pi}{2}\varepsilon(n)\right| = \frac{\pi}{2}\frac{\frac{1}{16n}}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+(1+\frac{1}{8n})} \leq \frac{\pi}{2}\frac{\frac{1}{16n}}{2} = \pi\frac{1}{64n}$, car $\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+(1+\frac{1}{8n}) \geq 2 > 0$, donc $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+(1+\frac{1}{8n})} \leq \frac{1}{2}$ et on multiplie cette inégalité par $\frac{\pi}{32n} > 0$.

On obtient finalement, $\left|\frac{\pi}{2}\varepsilon(n)\right| \leq \pi\frac{1}{64n} \leq \pi\frac{1}{64}$ car $n \geq 1$.

Compte tenu du signe de $\frac{\pi}{2}\varepsilon(n)$, on a l'encadrement suivant : $-\frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon(n) \leq 0$, donc

$$0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n) \leq \frac{\pi}{4}$$

Sur le cercle trigonométrique, on a la situation suivante :



Il apparaît clairement que $0 < b_n \leq a_n$.

3–a)

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction φ est dérivable comme produit de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned}
\forall x > 0,\ \varphi'(x) &= \sqrt{1+\frac{1}{4x}} + x\frac{-\frac{1}{4x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{4x}} + \frac{-\frac{1}{8x}}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{4x}-\frac{1}{8x}}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} \\
&= \frac{1+\frac{1}{8x}}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} > 0
\end{aligned}$$

La fonction est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont positives, elles varient dans le mêmes sens que leurs carrés. Or la relation fondamentale $a_n^2 + b_n^2 = 1$ impose que les deux suites (a_n^2) et (b_n^2) varient en sens inverse. Si nous montrons que la suite (a_n) décroît, alors la suite (b_n) sera croissante.

Remarque : puisque $a_n \geq b_n$, si les suites sont adjacentes, alors nécessairement la suite (a_n) doit décroitre.

Puisque $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n) \in [0, \frac{\pi}{4}]$, (a_n) décroît si et seulement si $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(n)\right)$ croît car la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, donc si $(\varepsilon(n))$ croît, donc si et seulement si $(-\varepsilon(n))$ décroît.

Or $-\varepsilon(n) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{4n(\sqrt{1+\frac{1}{4n}}+1+\frac{1}{8n})} = \dfrac{1}{16}\dfrac{1}{\varphi(n)+n+\frac{1}{8}}$

La fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la suite $n \longmapsto \varphi(n)$ est croissante, donc la suite $n \longmapsto \varphi(n)+n+\dfrac{1}{8}$ est croissante également. Et puisque cette suite est strictement positive, son inverse $n \longmapsto \dfrac{1}{\varphi(n)+n+\frac{1}{8}}$ est décroissante.

Nous venons de montrer que la suite $(-\varepsilon(n))$ est décroissante, donc la suite $(\varepsilon(n))$ est croissante et par conséquent, la suite (a_n) est décroissante. On en conclut que la suite (b_n) est croissante.

Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement décroissante et croissante, elles ont même limite, donc elles sont adjacentes