ENONCE–32

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et de période T.

1) Montrer que l'application $a \in \mathbb{R} \longmapsto I(a) = \displaystyle\int_a^{a+T}$ est constante. On notera I cette constante.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_a^{a+x} f(t)dt \right) = \frac{I}{T}$

3) Montrer que si f admet une primitive F bornée, alors F est périodique.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 32

1)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Utilisons la relation de Chasles.

$$\begin{aligned} I(a) - I(b) &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^{a+T} f(x)dx - \int_b^{a+T} f(x)dx - \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale, posons $u = x - T$; $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(u+T)du = \int_a^b f(u)du$ puisque f a pour période T.

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ I(a) = I(b) \text{ : l'application } a \longmapsto I(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx \text{ est constante.}}$$

Remarque : une autre démonstration.

f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives. Soit F l'une d'entre elles.

$I(a) = F(a+T) - F(a)$. L'application $a \longmapsto a+T$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; F est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, $a \longmapsto F(a+T)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $f(a+T) = f(a)$ puisque f a pour période T.

Donc $\forall a \in \mathbb{R},\ I'(a) = f(a) - f(a) = 0$; cela veut dire que l'application $a \longmapsto I(a)$ est constante.

2)

Puisque x tend vers $+\infty$, on peut le supposer positif et supérieur ou égal à T.

Donc il existe $n \in \mathbb{N}^* \ / \ nT \leq x < (n+1)T$: en effet on peut définir n comme la partie entière de $\frac{x}{T}$.

Notons $J(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_a^{a+x} f(t)dt$.

$$J(x) = \underbrace{\frac{1}{x}\int_a^{a+nT} f(t)dt}_{A} + \underbrace{\frac{1}{x}\int_{a+nT}^{a+x} dt}_{B}.$$

$A = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(t)dt = \frac{nI}{x}$ car les n intégrales valent I.

Or $0 < nT \leq x < (n+1)T \iff \dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{T} < \dfrac{n}{x} \leq \dfrac{1}{T}$.

Remarquons que $x \to +\infty \iff n \to +\infty$, donc par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{n}{x} = \frac{1}{T}$ et par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{nI}{x} = \frac{I}{T}$.

Il s'agit maintenant de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} B = 0$.

$|B| \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{a+nT}^{a+x} |f(t)|dt$ car les bornes sont dans l'ordre croissant. De plus $t \longmapsto |f(t)|$ est une fonction continue périodique, donc elle est bornée ; en effet l'image de $\mathbb{R}$ par cette fonction est l'image de $[0 : T]$, $|f|$ est continue sur un intervalle fermé, donc bornée. Soit M un majorant de $|f|$; on a $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leq M$. On intègre cette inégalité sur $[a+nT, a+x]$ et on obtient :

$|B| \leq \frac{1}{x} \int_{a+nT}^{a+x} M dt$, donc $|B| \leq \frac{1}{x} M(x-nT) \leq \frac{M}{x} T$,

car $0 < nT \leq x < (n+1)T \Longrightarrow 0 \leq x - nT < T$.

Par encadrement $\lim\limits_{x \to +\infty} |B| = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} B = 0$.

$$\boxed{J(x) = \frac{1}{x} \int_{a}^{a+x} f(t) dt = A + B, \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} J(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_{a}^{a+x} f(t) dt = \frac{I}{T}}$$

3) ____

Remarquons que, s'il existe une primitive bornée, elles le sont toutes. On peut supposer que F est bornée.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x+T) - F(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+T} f(t) dt = I$.

Or $J(x) = \frac{1}{x}(F(x+T) - F(T))$ d'après la question 1) pour $a = T$. Notons K un majorant de $|F|$ (ce majorant existe puisque F est bornée). En utilisant l'inégalité de la valeur absolue, on obtient

$|J(x)| \leq \frac{1}{x}(|F(x+T)| + |F(T)|) \leq \frac{2K}{x}$.

Par encadrement, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} J(x) = 0$. Or on a vu dans la question précédente que $\lim\limits_{x \to +\infty} J(x) = \frac{I}{T}$, donc $I = 0$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ admet une primitive } F \text{ bornée, alors } \forall x \in \mathbb{R},\ F(x+T) = F(x) : F \text{ est périodique}}$$