



## ANALYSE

## ENONCE DE L'EXERCICE

## ENONCE-32

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continue et de période  $T$ .

1) Montrer que l'application  $a \in \mathbb{R} \mapsto I(a) = \int_a^{a+T}$  est constante. On notera  $I$  cette constante.

2) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \int_a^{a+x} f(t) dt \right) = \frac{I}{T}$

3) Montrer que si  $f$  admet une primitive  $F$  bornée, alors  $F$  est périodique.

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 32

1)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Utilisons la relation de Chasles.

$$\begin{aligned} I(a) - I(b) &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^{a+T} f(x)dx - \int_b^{a+T} f(x)dx - \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale, posons  $u = x - T$  ;  $\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(u+T)du = \int_a^b f(u)du$  puisque  $f$  a pour période  $T$ .

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, I(a) = I(b) : \text{l'application } a \mapsto I(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx \text{ est constante.}$$

**Remarque** : une autre démonstration.

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle y admet donc des primitives. Soit  $F$  l'une d'entre elles.

$I(a) = F(a+T) - F(a)$ . L'application  $a \mapsto a+T$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ;  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc par composition,  $a \mapsto F(a+T)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée vaut  $f(a+T) = f(a)$  puisque  $f$  a pour période  $T$ .

Donc  $\forall a \in \mathbb{R}, I'(a) = f(a) - f(a) = 0$  ; cela veut dire que l'application  $a \mapsto I(a)$  est constante.

2)

Puisque  $x$  tend vers  $+\infty$ , on peut le supposer positif et supérieur ou égal à  $T$ .

Donc il existe  $n \in \mathbb{N}^* / nT \leq x < (n+1)T$  : en effet on peut définir  $n$  comme la partie entière de  $\frac{x}{T}$ .

Notons  $J(x) = \frac{1}{x} \int_a^{a+x} f(t)dt$ .

$$J(x) = \underbrace{\frac{1}{x} \int_a^{a+nT} f(t)dt}_A + \underbrace{\frac{1}{x} \int_{a+nT}^{a+x} f(t)dt}_B$$

$$A = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(t)dt = \frac{nI}{x} \text{ car les } n \text{ intégrales valent } I.$$

$$\text{Or } 0 < nT \leq x < (n+1)T \iff \frac{n}{n+1} \frac{1}{T} < \frac{n}{x} \leq \frac{1}{T}.$$

Remarquons que  $x \rightarrow +\infty \iff n \rightarrow +\infty$ , donc par encadrement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} = \frac{1}{T}$  et par suite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nI}{x} = \frac{I}{T}$ .

Il s'agit maintenant de montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} B = 0$ .

$|B| \leq \frac{1}{x} \int_{a+nT}^{a+x} |f(t)|dt$  car les bornes sont dans l'ordre croissant. De plus  $t \mapsto |f(t)|$  est une fonction continue périodique, donc elle est bornée ; en effet l'image de  $\mathbb{R}$  par cette fonction est l'image de  $[0 : T]$ ,  $|f|$  est continue sur un intervalle fermé, donc bornée. Soit  $M$  un majorant de  $|f|$  ; on a  $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq M$ . On intègre cette inégalité sur  $[a+nT, a+x]$  et on obtient :

$$|B| \leq \frac{1}{x} \int_{a+nT}^{a+x} M dt, \text{ donc } |B| \leq \frac{1}{x} M(x - nT) \leq \frac{M}{x} T,$$

car  $0 < nT \leq x < (n+1)T \implies 0 \leq x - nT < T$ .

Par encadrement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |B| = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} B = 0$ .

$$J(x) = \frac{1}{x} \int_a^{a+x} f(t) dt = A + B, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^{a+x} f(t) dt = \frac{I}{T}$$

**3)**

Remarquons que, s'il existe une primitive bornée, elles le sont toutes. On peut supposer que  $F$  est bornée.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = I.$$

Or  $J(x) = \frac{1}{x}(F(x+T) - F(T))$  d'après la question 1) pour  $a = T$ . Notons  $K$  un majorant de  $|F|$  (ce majorant existe puisque  $F$  est bornée). En utilisant l'inégalité de la valeur absolue, on obtient

$$|J(x)| \leq \frac{1}{x} (|F(x+T)| + |F(T)|) \leq \frac{2K}{x}.$$

Par encadrement, on déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = 0$ . Or on a vu dans la question précédente que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = \frac{I}{T}$ , donc  $I = 0$ .

Si  $f$  admet une primitive  $F$  bornée, alors  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x+T) = F(x)$  :  $F$  est périodique