DIAGONALISATION 1 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique.
Montrer que $(\exists\, k \in \mathbb{N}^* \ / \ A^k = I_n) \Longrightarrow (A^2 = I_n)$.
2) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques.
Montre que $(A^3 = B^3) \Longrightarrow (A = B)$.

Indications - Diagonalisation.1

2) Considérer les endomorphismes f et g canoniquement associés à A et B. Montrer qu'ils ont les mêmes valeurs propres, les mêmes sous-espaces propres puis que les restrictions de f et g à chaque sous-espace propre sont égales.

Eléments de correction : Diagonalisaton.1

1) La matrice A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, il existe une matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.

$\forall p \in \mathbb{N},\ D^p = P^{-1}A^pP$ (résultat classique).

Donc $A^k = I_n \Longrightarrow D^k = I_n$. Cela veut dire que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i^k = 1$, ou encore $\lambda_i = \pm 1$ ou finalement $\lambda_i^2 = 1$. Cela donne $D^2 = I_n$.

Dans ces conditions, $A^2 = PD^2P^{-1} = I_n$**.**

2) Considérons l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et g l'endomorphisme de E canoniquement associé à B.

$A^3 = B^3 \Longleftrightarrow f^3 = g^3$.

Soit $\mathrm{spect}\,(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.

Alors puisque f est diagonalisable, $\mathrm{spect}\,(f^3) = \{\lambda_1^3, \ldots, \lambda_r^3\}$.

En effet, si l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de f (donc de A), alors A est semblable à

$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r \ldots \lambda_r}_{n_r \text{ fois}})$ et par suite A^3 est semblable à

$\mathrm{Diag}(\lambda_1^3, \ldots, \lambda_n^3) = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1^3, \ldots, \lambda_1^3}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^3, \ldots, \lambda_2^3}_{n_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r^3 \ldots \lambda_r^3}_{n_r \text{ fois}})$.

Ce qui prouve le résultat annoncé.

Comme $f^3 = g^3$, on en déduit que $\mathrm{spect}\,(g^3) = \{\lambda_1^3, \ldots, \lambda_r^3\}$, et le même raisonnement fait pour f prouvera que $\mathrm{spect}\,(g) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$,

$$\mathrm{spect}\,(f) = \mathrm{spect}\,(g) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$$

Le raisonnement précédent prouve, au regard des matrices

$\mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r \ldots \lambda_r}_{n_r \text{ fois}})$ et $\mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1^3, \ldots, \lambda_1^3}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^3, \ldots, \lambda_2^3}_{n_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r^3 \ldots \lambda_r^3}_{n_r \text{ fois}})$

que $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(f^3 - \lambda_i^3 \,\mathrm{Id}_E)$, car f et f^3 sont diagonalisables dans la même base.

De même pour g ; donc puisque $g^3 = f^3$, on en déduit $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\,(g - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E)$. Il en résulte que $\forall x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E),\ f(x) = \lambda_i x = g(x)$.

f étant diagonalisable, $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E)$.

$$\forall u \in E,\ u = \sum_{i=1}^{r} u_i \text{ où } u_i \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E), \text{ donc } f(u) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = g(u) \ :\ f = g.$$