



DIAGONALISATION 1 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-1

1) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , symétrique.

Montrer que  $(\exists k \in \mathbb{N}^* / A^k = I_n) \implies (A^2 = I_n)$ .

2) Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétriques.

Montre que  $(A^3 = B^3) \implies (A = B)$ .

### Indications - Diagonalisation.1

2) Considérer les endomorphismes  $f$  et  $g$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$ . Montrer qu'ils ont les mêmes valeurs propres, les mêmes sous-espaces propres puis que les restrictions de  $f$  et  $g$  à chaque sous-espace propre sont égales.

**Eléments de correction : Diagonalisation.1**

1) La matrice  $A$  est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , inversible, il existe une matrice  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$ .

$\forall p \in \mathbb{N}, D^p = P^{-1}A^pP$  (résultat classique).

Donc  $A^k = I_n \implies D^k = I_n$ . Cela veut dire que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i^k = 1$ , ou encore  $\lambda_i = \pm 1$  ou finalement  $\lambda_i^2 = 1$ . Cela donne  $D^2 = I_n$ .

**Dans ces conditions,  $A^2 = PD^2P^{-1} = I_n$ .**

2) Considérons l'endomorphisme  $f$  de  $E = \mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$  et  $g$  l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à  $B$ .

$$A^3 = B^3 \iff f^3 = g^3.$$

Soit  $\text{spect}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ .

Alors puisque  $f$  est diagonalisable,  $\text{spect}(f^3) = \{\lambda_1^3, \dots, \lambda_r^3\}$ .

En effet, si l'on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres non nécessairement distinctes de  $f$  (donc de  $A$ ), alors  $A$  est semblable à

$$\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r \text{ fois}})$$

$$\text{Diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1^3, \dots, \lambda_1^3}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^3, \dots, \lambda_2^3}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r^3, \dots, \lambda_r^3}_{n_r \text{ fois}}).$$

Ce qui prouve le résultat annoncé.

Comme  $f^3 = g^3$ , on en déduit que  $\text{spect}(g^3) = \{\lambda_1^3, \dots, \lambda_r^3\}$ , et le même raisonnement fait pour  $f$  prouvera que  $\text{spect}(g) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ ,

$$\text{spect}(f) = \text{spect}(g) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$$

Le raisonnement précédent prouve, au regard des matrices

$$\text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r \text{ fois}}) \text{ et } \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1^3, \dots, \lambda_1^3}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^3, \dots, \lambda_2^3}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r^3, \dots, \lambda_r^3}_{n_r \text{ fois}})$$

que  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E) = \text{Ker}(f^3 - \lambda_i^3 \text{Id}_E)$ , car  $f$  et  $f^3$  sont diagonalisables dans la même base.

De même pour  $g$ ; donc puisque  $g^3 = f^3$ , on en déduit  $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E) = \text{Ker}(g - \lambda_i \text{Id}_E)$ . Il en résulte que  $\forall x \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E), f(x) = \lambda_i x = g(x)$ .

$f$  étant diagonalisable,  $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E)$ .

$$\forall u \in E, u = \sum_{i=1}^r u_i \text{ où } u_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id}_E), \text{ donc } f(u) = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i = g(u) : f = g.$$