



DIAGONALISATION 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-2

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $n_k = \dim E(\lambda_k, A)$ la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur λ_k

$$\text{Montrer que } \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^r n_k \lambda_k^2$$

Indications - diagonalisation 2.

On pourra penser à l'invariance de la trace.

Eléments de correction : diagonalisation 2.

Rappelons que la trace de matrices semblables est la même. Pour les étudiants qui ne connaîtraient pas ce résultat, montrons le.

•

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Commençons par montrer que $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$

Rappelons que la trace d'une matrice est la somme de ses termes diagonaux.

Soit $C = AB$; le terme général de C est $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$

Soit $D = BA$; son terme général est $d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}$

$$\begin{aligned} \text{trace}(AB) &= \sum_{i=1}^n c_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \\ \text{trace}(BA) &= \sum_{i=1}^n d_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i} \quad \text{on intervertit les sommations} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{i,k} a_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{k,i} b_{i,k} \end{aligned}$$

Les deux sommes $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$ et $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{k,i} b_{i,k}$ sont égales ; il suffit, dans la première par exemple, d'intervertir les lettres k et i (qui sont des indices muets).

• Les matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned} \text{trace}(B) &= \text{trace}(P^{-1}AP) = \text{trace}((P^{-1}A)P) \\ &= \text{trace}(P(P^{-1}A)) = \text{trace}((PP^{-1})A) \\ &= \text{trace}(I_n A) = \text{trace}(A) \end{aligned}$$

On a montré $(A \text{ et } B \text{ semblables}) \implies \text{trace}(A) = \text{trace}(B)$

Remarque : cette propriété s'appelle l'invariance de la trace d'une matrice.

•

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes. La matrice A est semblable à la matrice diagonale suivante : $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Cela veut dire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ (pour les étudiants de la voie scientifique, on peut prendre pour P une matrice orthogonale, c'est-à-dire telle que $P^{-1} = {}^t P$, mais cela ne change en rien la démonstration).

$$\begin{aligned} A^2 &= (P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1})^2 \\ &= P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \underbrace{P^{-1} P}_{=I_n} \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \\ &= P (\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^2 P^{-1} \\ &= P \text{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) P^{-1} \end{aligned}$$

Ceci démontre que A semblable à $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \implies A^2$ semblable à $\text{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$.
 On en conclut que $\text{trace } A^2 = \text{trace } \text{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$

* Calcul de trace A^2 .

$$A^2 = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ avec } b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,j}.$$

$$\begin{aligned} \text{trace } A^2 &= \sum_{i=1}^n b_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{k,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{i,k} \quad \text{car } A \text{ est symétrique : } a_{k,i} = a_{i,k} \end{aligned}$$

$$\text{trace } A^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} a_{i,k}^2.$$

* Calcul de trace $\text{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$.

C'est la somme des termes diagonaux : $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2$. On regroupe les termes λ_1^2 autant de fois qu'on les trouve, c'est-à-dire n_1 fois où n_1 est la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_1 . Et l'on fait de même pour les autres valeurs propres distinctes.

Cela veut dire concrètement que si

$$\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r \text{ fois}})$$

$$\text{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1^2, \dots, \lambda_1^2}_{n_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2^2, \dots, \lambda_2^2}_{n_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_r^2, \dots, \lambda_r^2}_{n_r \text{ fois}})$$

$$\text{Il en résulte que } \text{trace } \text{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i^2$$

$$\text{Et par l'invariance de la trace : } \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} a_{i,k}^2 = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i^2.$$