DIAGONALISATION 3 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A + A^3 = (0)$.

Montrer que la matrice A est nulle ou semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Diagonalisation 3.

- 0 est la seule valeur propre possible.
- Si 0 est la seule valeur propre, A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (penser au noyau) et $b = 0$: conclure.
- Si $\text{spect}(A) = \emptyset$, considérer la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$; montrer que $(e_1, f(e_1))$ (où f est canoniquement associé à A) est une base de $\mathbb{R}^2$, puis que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$: conclure.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : diagonalisation 3.

- Le polynôme $X+X^3$ est annulateur de A, donc la seule valeur propre réelle possible est 0. Donc spect $A \subset \{0\}$.

Premier cas : 0 est la seule valeur propre de A.

Plaçons nous dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2) et associons canoniquement à A l'endomorphisme f.

Il existe un vecteur $u \neq 0_E$ dans Ker f. Complétons par un vecteur $v \in E$ tel que (u, v) soit une base de E. Dans cette base la matrice B de f est $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Mais $b = 0$ puisque A, donc f, n'admet que 0 comme valeur propre.

$B^2 = (0)$, donc $B^3 = (0)$; la relation $A + A^3 = (0)$ équivaut à $B + B^3 = (0)$, donc $B = (0)$, d'où $A = (0)$.

Si A admet 0 comme seule valeur propre, alors $A = (0)$.

Deuxième cas : A n'admet aucune valeur propre réelle :

$(e_1, f(e_1))$ est une famille libre : en effet, dans le cas contraire , **puisque** $e_1 \neq 0_E$, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ / $f(e_1) = \lambda e_1$. Cette égalité indiquerait que e_1 est un vecteur propre associé à λ et cela est contradictoire.

Dans la base $(e_1, f(e_1))$, la matrice B de f est $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Le calcul donne

$$B + B^3 = \begin{pmatrix} ab & a + a^2 + ab^2 \\ 1 + a + b^2 & b + 2ab + b^3 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $B + B^3 = (0)$ implique $ab = 0$ et $1 + a + b^2 = 0$. Si $a = 0$, on obtient $1 + b^2 = 0$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$: donc $b = 0$ et $a = -1$. On vérifie que les deux autres égalités sont satisfaites.

Si A n'admet pas de valeurs propres réelles, alors A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021