DIAGONALISATION 4 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–4

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ P^{-1}MP$ est diagonale $\}$ est-il un espace vectoriel ?

2) $G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ M$ est diagonalisable $\}$ est-il un espace vectoriel ?

Indications - Diagonalisation 4.

1) oui.

2) non $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Eléments de correction : Diagonalisation 4.

1) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ P^{-1}MP$ est diagonale $\}$ est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

F n'est pas vide : il contient la matrice nulle et la matrice unité.

Si M et N sont deux matrices de F et λ un réel,

$P^{-1}(\lambda M + N)P = \lambda P^{-1}MP + P^{-1}NP$ qui est diagonale car on sait que l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a montré que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

c'est donc un espace vectoriel

2) Prenons $n = 2$. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice M est diagonalisable car elle est d'ordre 2, triangulaire, et admet deux valeurs propres distinctes qui sont ses termes diagonaux 0 et 1.

Soit $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pour les mêmes raisons, M' est diagonalisable.

$A = M + M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut constater que A n'admet qu'une valeur propre 0, puisqu'elle est triangulaire et n'admet que des zéros sur sa diagonale.

On peut constater aussi que $A^2 = (0)$. Donc un polynôme annulateur de A est X^2. La seule valeur propre possible de A est 0 (en fait 0 est effectivement une valeur propre de A car A n'est pas inversible : une colonne nulle).

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui n'est manifestement pas le cas.

Donc G n'est pas stable pour l'addition : ce n'est pas un espace vectoriel.