ENDOMORPHISMES 1 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $(n \geq 2)$. On suppose que $f \circ f \neq f_0$ (endomorphisme nul) et $\text{rang}(f) = 1$. Montrer que f est diagonalisable.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Endomorphismes1

Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : Endomorphismes.1

Notons $E = \mathbb{R}^n$.

Le rang de f vaut 1 veut dire que dim Im $f = 1$; il existe donc un vecteur $e_1 \in E$ tel que Im $f =$ vect (e_1).

D'après le théorème du rang, dim Ker $f = n - 1$. Or Ker $f = E(0, f)$, sous-espace propre de f associé à la valeur propre 0 puisque Ker $f \neq \{0\}$, $(n - 1 \geq 1)$.

Notons $(e_2, \ldots, e_n)$ une base de Ker f.

Montrons que $f(e_1) \neq 0$.

En effet, pour tout $z \in E$, $f(z) \in$ Im f, donc $\forall z \in E,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}\ /\ f(z) = \alpha e_1$.

Il s'ensuit que $\forall z \in E,\ f^2(z) = \alpha f(e_1)$.

Si $f(e_1) = 0$, alors $\forall z \in E,\ f(z) = 0$: cela voudrait dire que $f^2 = f_0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $f(e_1) \neq 0$.

Montrons que Ker f et Im f sont en somme directe.

Soit donc $x \in$ Im $f \cap$ Ker f ; il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda e_1$ et $f(x) = 0$; donc $f(\lambda e_1) = \lambda f(e_1) = 0$.

On sait que $f(e_1) \neq 0$. Il en résulte que l'égalité $\lambda f(e_1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ et par conséquent $x = 0$.

On a montré que Im $f \cap$ Ker $f = \{0\}$.

Si on ajoute à cette propriété que dim Im $f +$ dim Ker $f = n =$ dim E, on obtient que Im f et Ker f sont supplémentaires dans E.

Conséquence : la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Dans cette base, la matrice A de f est

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de f est diagonale : l'endomorphisme f est diagonalisable

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021