



**ENDOMORPHISMES 1 HEC.ESCP**

**ENONCE DE L'EXERCICE**

**ENONCE-1**

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , ( $n \geq 2$ ). On suppose que  $f \circ f \neq f_0$  (endomorphisme nul) et  $\text{rang}(f) = 1$ .  
Montrer que  $f$  est diagonalisable.

## Indications - Endomorphismes1

Montrer que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.

## Éléments de correction : Endomorphismes.1

Notons  $E = \mathbb{R}^n$ .

Le rang de  $f$  vaut 1 veut dire que  $\dim \operatorname{Im} f = 1$  ; il existe donc un vecteur  $e_1 \in E$  tel que  $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(e_1)$ .

D'après le théorème du rang,  $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$ . Or  $\operatorname{Ker} f = E(0, f)$ , sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre 0 puisque  $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ , ( $n - 1 \geq 1$ ).

Notons  $(e_2, \dots, e_n)$  une base de  $\operatorname{Ker} f$ .

Montrons que  $f(e_1) \neq 0$ .

En effet, pour tout  $z \in E$ ,  $f(z) \in \operatorname{Im} f$ , donc  $\forall z \in E, \exists \alpha \in \mathbb{R} / f(z) = \alpha e_1$ .

Il s'ensuit que  $\forall z \in E, f^2(z) = \alpha f(e_1)$ .

Si  $f(e_1) = 0$ , alors  $\forall z \in E, f(z) = 0$  : cela voudrait dire que  $f^2 = f_0$  ce qui est contraire à l'hypothèse.

**Donc**  $f(e_1) \neq 0$ .

Montrons que  $\operatorname{Ker} f$  et  $\operatorname{Im} f$  sont en somme directe.

Soit donc  $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$  ; il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $x = \lambda e_1$  et  $f(x) = 0$  ; donc  $f(\lambda e_1) = \lambda f(e_1) = 0$ .

On sait que  $f(e_1) \neq 0$ . Il en résulte que l'égalité  $\lambda f(e_1) = 0 \iff \lambda = 0$  et par conséquent  $x = 0$ .

On a montré que  $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ .

Si on ajoute à cette propriété que  $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n = \dim E$ , on obtient que  $\operatorname{Im} f$  et  $\operatorname{Ker} f$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Conséquence : la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .

Dans cette base, la matrice  $A$  de  $f$  est

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**La matrice de  $f$  est diagonale : l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable**