ENDOMORPHISMES 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que Im f et Ker f ne sont pas supplémentaires.

Que peut-on dire de Im f et Ker f ?

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Endomorphismes.2

Discuter suivant la dimension de $\text{Im } f \cap \text{Ker } f$.
On montrera que $\dim(\text{Im } f \cap \text{Ker } f) = 1$.
Puis on discutera suivant la dimension de $\text{Im } f$ (ou de $\text{Ker } f$)
La réponse est : dans tous les cas l'un est inclus dans l'autre.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

• D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 3$. Donc dire que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires équivaut à dire : $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 0$.

Il en résulte que :

$\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ non supplémentaires équivaut à $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \in \{1, 2, 3\}$

• **Eliminons tout de suite le cas :** $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 3$.

En effet, dans ce cas, on aurait $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = \dim E$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset E$, donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = E$; ce qui serait équivalent à $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = E$: en effet, on a toujours $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \subset E$; il en résulte que l'égalité $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = E$, qui équivaut à $E \subset \operatorname{Im} f$ et $E \subset \operatorname{Ker} f$, donne $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f = E$.

Cette dernière égalité entrainerait, d'après le théorème du rang, $2 \dim E = \dim E$, ce qui est manifestement impossible.

• **Eliminons le cas où** $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 2$.

L'inclusion $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f$ implique $\dim \operatorname{Im} f \geq 2$; de même l'inclusion $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ implique $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$.

On aurait donc $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f \geq 4$, ce qui est impossible d'après le théorème du rang.

• **Il ne reste plus que le cas où** $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 1$.

Les inclusions $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ imposent $\dim \operatorname{Im} f \geq 1$ et $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$.

◇ Si $\dim \operatorname{Im} f = 1$.

$\dim \operatorname{Im} f = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 1$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f$ impliquent $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f$.

Cette dernière égalité équivaut à $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Traduisons cette dernière inclusion (bien que ce ne soit pas indispensable) :

$\forall x \in E,\ f(x) \in \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ f^2(x) = 0$: $f^2 = f_0$ (endomorphisme nul).

◇ Si $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

$\dim \operatorname{Ker} f = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 1$ et $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ impliquent $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$. De là on conclut : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$.

◇ Si $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

Alors f est surjectif, donc bijectif et $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Il en résulte que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ ce qui est impossible puisque nous sommes dans le cas où $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 1$.

En résumé : $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = 1 \Longrightarrow (\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ ou $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f)$

Finalement : il y a une seule possibilité : $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 1$ **; ce qui donne : entre** $\operatorname{Ker} f$ **et** $\operatorname{Im} f$ **il y a toujours une inclusion**

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021