ENDOMORPHISMES 3 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Soit $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) et $(u, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$. On suppose que $g \circ u - u \circ g = 2u$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \; g \circ u^k - u^k \circ g = 2ku^k$

2) En déduire que si g est diagonalisable, alors u est nilpotent.

Indications - Endomorphismes.3

1) Démonstration par récurrence.

2) On pourra utiliser une base formée de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$ (où e_i est associé à λ_i) et montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\exists\, p_i \in \mathbb{N}^*$ / $u^{p_i}(e_i) = 0$ sinon g aurait une infinité de valeurs propres.

Eléments de correction : Endomorphismes.3

1) Faisons une démonstration par récurrence.

Notons P_k la propriété : " $g \circ u^k - u^k \circ g = 2ku^k$ "

$*$ D'après l'hypothèse, la propriété est satisfaite pour $k = 1$.

$*$ Supposons que la propriété soit satisfaite pour un entier $k \geq 1$, donné. On a donc $g \circ u^k - u^k \circ g = 2ku^k$.

$$\begin{aligned} g \circ u^{k+1} &= (g \circ u^k) \circ u \\ &= (u^k \circ g + 2ku^k) \circ u \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= u^k \circ g \circ u + 2ku^{k+1} \\ &\quad \text{or } g \circ u = u \circ g + 2u \text{ par hypothèse, donc} \\ g \circ u^{k+1} &= u^k \circ (u \circ g + 2u) + 2ku^{k+1} \\ &= u^{k+1} \circ g + 2u^{k+1} + 2ku^{k+1} \\ &= u^{k+1} \circ g + 2(k+1)u^{k+1} \end{aligned}$$

Finalement : $g \circ u^{k+1} - u^{k+1} \circ g = 2(k+1)u^{k+1}$

La propriété est héréditaire et, par le principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

2) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de g (cette base existe car g est diagonalisable). Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} g(u^k(e_i)) - u^k(g(e_i)) &= 2ku^k(e_i) \qquad \text{ou encore} \\ g(u^k(e_i)) &= u^k(g(e_i)) + 2ku^k(e_i) \\ g(u^k(e_i)) &= u^k(\lambda_i e_i) + 2ku^k(e_i) \\ g(u^k(e_i)) &= \lambda_i u^k(e_i) + 2ku^k(e_i) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ g(u^k(e_i)) = (\lambda_i + 2k)u^k(e_i)$

Si pour tout $k \geq 1,\ u^k(e_i) \neq 0$, l'égalité précédente indique que le vecteur $u^k(e_i)$ est un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda_i + 2k$, ou encore $\lambda_i + 2k$ est une valeur propre de g.

L'endomorphisme g aurait une infinité de valeurs propres car l'ensemble $\{\lambda_i + 2k, k \in \mathbb{N}^*\}$ est infini.

Or on sait qu'un endomorphisme d'un espace de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes : il y a là une contradiction.

Conclusion : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un entier $p_i \geq 1$ tel que $u^{p_i}(e_i) = 0$.

Prenons $m = \max(p_1, \ldots, p_n)$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ m \geq p_i \Longrightarrow u^m(e_i) = 0$

L'endomorphisme g^m est nul sur une base de E, donc g^m est nul : g est nilpotent