ENDOMORPHISMES 3 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Soit $E = \mathbb{K}^n$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) et $(u, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$. On suppose que $g \circ u - u \circ g = 2u$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g \circ u^k - u^k \circ g = 2ku^k$

2) En déduire que si g est diagonalisable, alors u est nilpotent.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Endomorphismes.3

1) Démonstration par récurrence.

2) On pourra utiliser une base formée de vecteurs propres $(e_1, \dots, e_n)$ (où e_i est associé à λ_i) et montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\exists\, p_i \in \mathbb{N}^* \ / \ u^{p_i}(e_i) = 0$ sinon g aurait une infinité de valeurs propres.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : Endomorphismes.3

1) Faisons une démonstration par récurrence.

Notons P_k la propriété : " $g \circ u^k - u^k \circ g = 2ku^k$ "

∗ D'après l'hypothèse, la propriété est satisfaite pour $k = 1$.

∗ Supposons que la propriété soit satisfaite pour un entier $k \geq 1$, donné. On a donc $g \circ u^k - u^k \circ g = 2ku^k$.

$$\begin{aligned} g \circ u^{k+1} &= (g \circ u^k) \circ u \\ &= (u^k \circ g + 2ku^k) \circ u \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= u^k \circ g \circ u + 2ku^{k+1} \end{aligned}$$

or $g \circ u = u \circ g + 2u$ par hypothèse, donc

$$\begin{aligned} g \circ u^{k+1} &= u^k \circ (u \circ g + 2u) + 2ku^{k+1} \\ &= u^{k+1} \circ g + 2u^{k+1} + 2ku^{k+1} \\ &= u^{k+1} \circ g + 2(k+1)u^{k+1} \end{aligned}$$

Finalement : $g \circ u^{k+1} - u^{k+1} \circ g = 2(k+1)u^{k+1}$

La propriété est héréditaire et, par le principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout entier $k \geq 1$.

2) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de g (cette base existe car g est diagonalisable). Notons λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} g(u^k(e_i)) - u^k(g(e_i)) &= 2ku^k(e_i) \quad \text{ou encore} \\ g(u^k(e_i)) &= u^k(g(e_i)) + 2ku^k(e_i) \\ g(u^k(e_i)) &= u^k(\lambda_i e_i) + 2ku^k(e_i) \\ g(u^k(e_i)) &= \lambda_i u^k(e_i) + 2ku^k(e_i) \end{aligned}$$

Finalement : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ g(u^k(e_i)) = (\lambda_i + 2k)u^k(e_i)$

Si pour tout $k \geq 1,\ u^k(e_i) \neq 0$, l'égalité précédente indique que le vecteur $u^k(e_i)$ est un vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda_i + 2k$, ou encore $\lambda_i + 2k$ est une valeur propre de g.

L'endomorphisme g aurait une infinité de valeurs propres car l'ensemble $\{\lambda_i + 2k, k \in \mathbb{N}^*\}$ est infini.

Or on sait qu'un endomorphisme d'un espace de dimension n admet au plus n valeurs propres distinctes : il y a là une contradiction.

Conclusion : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un entier $p_i \geq 1$ tel que $u^{p_i}(e_i) = 0$.

Prenons $m = \max(p_1, \ldots, p_n)$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ m \geq p_i \Longrightarrow u^m(e_i) = 0$

L'endomorphisme g^m est nul sur une base de E, donc g^m est nul : g est nilpotent

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021