SUJETS COURTS DE MATHEMATIQUES

ENDOMORPHISMES 4 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les endomorphismes f de E tels que, pour toute droite vectorielle D incluse dans E on ait $f(D) \subset D$.

On rappelle peut-être qu'une droite vectorielle est un espace de dimension 1.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - Endomorphismes 4.

- Considérer une base de E et montrer que ses vecteurs sont des vecteurs propres de f.
- Montrer que f est une homothétie vectorielle.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : endomorphismes 4.

Soit D une droite vectorielle : il existe $u \neq 0_E$ tel que $D = \text{vect}(u)$. On sait que $f(D) = \text{vect}(f(u))$, et par suite $f(D) \subset D$ si et seulement si $f(u) \in D$. Donc il existe un réel λ tel que $f(u) = \lambda u$. Ce qui prouve, mais ce n'est pas indispensable de le noter, que u est un vecteur propre de f puisqu'il est non nul.

Notons $n,\ n \geq 1$, la dimension de E et considérons maintenant une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$, la droite D_i de base e_i est stable par f, donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists\, \lambda_i \in \mathbb{R}\ /\ f(e_i) = \lambda_i e_i$$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}\ /\ f(e_1 + e_i) = \alpha_i(e_1 + e_i)$. Par linéarité de f :

$f(e_1 + e_i) = f(e_1) + f(e_i)$; ce qui donne $\alpha_i(e_1 + e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$, ou $\alpha_i e_1 + \alpha_i e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$.

La famille (e_1, e_i) étant libre, en tant que sous famille d'une famille libre, on déduit :

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \lambda_1 (= \alpha_i)$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = \lambda_1 e_i$. La matrice de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est égale à $\lambda_1 I_n$. Ce qui veut dire que

$$\forall u \in E,\ f(u) = \lambda_1 u : f \text{ est une homothétie vectorielle.}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021