ENDOMORPHISMES 4 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les endomorphismes f de E tels que, pour toute droite vectorielle D incluse dans E on ait $f(D) \subset D$.

On rappelle peut-être qu'une droite vectorielle est un espace de dimension 1.

Indications - Endomorphismes 4.

- Considérer une base de E et montrer que ses vecteurs sont des vecteurs propres de f.
- Montrer que f est une homothétie vectorielle.

Eléments de correction : endomorphismes 4.

Soit D une droite vectorielle : il existe $u \neq 0_E$ tel que $D = \text{vect}(u)$. On sait que $f(D) = \text{vect}(f(u))$, et par suite $f(D) \subset D$ si et seulement si $f(u) \in D$. Donc il existe un réel λ tel que $f(u) = \lambda u$. Ce qui prouve, mais ce n'est pas indispensable de le noter, que u est un vecteur propre de f puisqu'il est non nul.

Notons n, $n \geq 1$, la dimension de E et considérons maintenant une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$, la droite D_i de base e_i est stable par f, donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists\, \lambda_i \in \mathbb{R} \ /\ f(e_i) = \lambda_i e_i$$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R} \ /\ f(e_1 + e_i) = \alpha_i (e_1 + e_i)$. Par linéarité de f :

$f(e_1 + e_i) = f(e_1) + f(e_i)$; ce qui donne $\alpha_i(e_1 + e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$, ou $\alpha_i e_1 + \alpha_i e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$.

La famille (e_1, e_i) étant libre, en tant que sous famille d'une famille libre, on déduit :

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \lambda_1 (= \alpha_i)$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = \lambda_1 e_i$. La matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est égale à $\lambda_1 I_n$. Ce qui veut dire que

$$\forall u \in E,\ f(u) = \lambda_1 u : f \text{ est une homothétie vectorielle.}$$