ENDOMORPHISMES 8 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–8

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2, tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

On considère un espace vectoriel réel E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que P soit un polynôme annulateur de f.

Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$. En déduire $E = \text{Ker}\, f \bigoplus \text{Im}\, f$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - endomorphismes 8.

On montrera $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$, puis que les deux sous-espaces $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont en somme directe.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : endomorphismes 8.

Notons $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Les hypothèses donnent $a_0=0$ et $a_1\neq 0$, donc $P=\sum_{k=1}^{n} a_k X^k$

On rappelle que pour tout endomorphisme g de E, on a $\text{Ker}\, g \subset \text{Ker}\, g^2$.

Il s'agit donc de démontrer que : $\text{Ker}\, f^2 \subset \text{Ker}\, f$.

P est un polynôme annulateur de f donc $P(f)=0$, ce qui donne $a_1 f=-\sum_{k=2}^{n} a_k f^k$.

Soit $x\in \text{Ker}\, f^2$, alors $\forall k\geq 2,\ f^k(x)=0$, donc on obtient $a_1 f(x)=0$ et puisque $a_1\neq 0$, il vient $f(x)=0$.

$$\forall x\in \text{Ker}\, f^2,\ x\in \text{Ker}\, f\ :\ \text{Ker}\, f^2\subset \text{Ker}\, f,\ \text{donc}\ \text{Ker}\, f=\text{Ker}\, f^2.$$

Puisque $\dim E$ est finie, on peut appliquer le théorème du rang :

$$\dim E=\dim \text{Ker}\, f+\dim \text{Im}\, f.$$

Les sous-espaces $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont supplémentaires si et seulement s'ils sont en somme directe.

Soit $x\in \text{Ker}\, f\cap \text{Im}\, f$; $f(x)=0$ et il existe $t\in E\ /\ x=f(t)$. On obtient $f(x)=f^2(t)=0$, donc $t\in \text{Ker}\, f^2$ et il en résulte que $t\in \text{Ker}\, f$: $x=f(t)=0$ et on a bien $\text{Ker}\, f\cap \text{Im}\, f=\{0\}$.

$$\textbf{Conclusion :}\ E=\text{Ker}\, f\bigoplus \text{Im}\, f\textbf{.}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021