ESPACES VECTORIELS 2 HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), A et B deux sous-espaces vectoriels de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

1) $f(A) \cap f(B) = f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f)$.

2) $f(A) = f(B) \iff A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : espaces vectoriels.2

1) On a évidemment $A \subset A + \text{Ker } f$; donc $f(A) \subset f(A + \text{Ker } f)$

De même $B \subset B + \text{Ker } f$, donc $f(B) \subset f(B + \text{Ker } f)$.

Il en résulte que $f(A) \cap f(B) \subset f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f)$.

Inclusion réciproque.

Soit $y \in f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f)$; cela veut dire $\exists\, (a, b, x, x') \in A \times B \times (\text{Ker } f)^2$ tel que $y = f(a + x)$ et $y = f(b + x')$. Donc par linéarité $f(a + x) = f(a) + f(x) = f(a)$ puisque $x \in \text{Ker } f$ et de même $f(b + x') = f(b)$.

Conclusion : $y = f(a) = f(b)$, donc $y \in f(A) \cap f(B)$

$\forall y \in f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f),\ y \in f(A) \cap f(B)$ veut dire

$$f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f) \subset f(A) \cap f(B)$$

Conclusion : $f(A + \text{Ker } f) \cap f(B + \text{Ker } f) = f(A) \cap f(B)$

2)

- Sens direct. Hypothèse $f(A) = f(B)$.

Montrons : $A + \text{Ker } f \subset B + \text{Ker } f$.

Soit $x \in A + \text{Ker } f$; il existe $(a, t) \in A \times \text{Ker } f$ tel que $x = a + t$.

Alors $f(x) = f(a) + f(t) = f(a)$; donc $f(x) \in f(A)$ et puisque $f(A) = f(B)$, on a $f(x) \in f(B)$. Exprimons que $f(x) \in f(B)$; il existe $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$; on conclut que $f(x - b) = 0_E$, donc $x - b \in \text{Ker } f$. Il existe $t' \in \text{Ker } f$ tel que $x - b = t'$ ou encore $x = b + t'$, donc $x \in B + \text{Ker } f$.

Conclusion : $\forall x \in A + \text{Ker } f,\ x \in B + \text{Ker } f : A + \text{Ker } f \subset B + \text{Ker } f$

Par raison de la symétrie des rôles de A et B, on aura l'inclusion en sens inverse et par conséquent

$$f(A) = f(B) \Longrightarrow A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f.$$

- Sens réciproque. Hypothèse $A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f$.

Soit $x \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $x = f(a)$ Or $a \in A$, donc $a \in A + \text{Ker } f$ (puisque $a = a + 0_E$ avec $0_E \in \text{Ker } f$). Il en résulte que $a \in B + \text{Ker } f$ par hypothèse.

Ecrivons cela ; il existe $(b, t) \in B \times \text{Ker } f$ tel que $a = b + t$. Dans ces conditions, $f(a) = f(b) + f(t) = f(b)$, donc $x = f(a) = f(b) \in f(B)$.

$$\forall x \in f(A),\ x \in f(B) : f(A) \subset f(B).$$

Et par symétrie, on aura $f(B) = f(A)$.

$$A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f \Longrightarrow f(A) = f(B).$$

Finalement, on a montré : $A + \text{Ker } f = B + \text{Ker } f \Longleftrightarrow f(A) = f(B)$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021