FONCTIONS REELLES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$.

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Montrer que les nombres dérivés $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nuls sauf lorsque n est un multiple de 3.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - fonctions 2.

1) $D_f =]-1, +\infty[$

2) Penser aux développement limités et pour ce faire écrire autrement $f(x)$ en faisant intervenir des sommes de suites géométriques.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : fonctions 2.

1) $f(x)$ existe si et seulement si $x+1\neq 0$ et $x+\dfrac{1}{x+1}>0$.

$x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Cette fraction est du signe de $x+1$ puisque x^2+x+1 n'a pas de racines réelles (son discriminant est -3).

$$D_f=]-1,+\infty[$$

2) L'application $x\longmapsto x+\dfrac{1}{x+1}$ est de classe C^∞ sur D_f (comme somme de fonctions qui le sont) et à valeurs dans $]0,+\infty[$. L'application ln est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, donc par composition, f est de classe C^∞ sur D_f.
Il en résulte que f admet en 0 un développement limité à n'importe quel ordre. Ce développement peut être obtenu par Taylor ;

$\forall n\in\mathbb{N}$, le coefficient de x^n dans ce développement est $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Calculons ce développement et pour cela transformons un peu l'écriture de $f(x)$.

$$\forall x\in\,]-1,1[,\ x+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{\dfrac{1-x^3}{1-x}}{\dfrac{1-x^2}{1-x}}=\frac{1-x^3}{1-x^2}.$$

Puisque $1-x^3$ et $1-x^2$ sont >0 sur $]-1,1[$, on peut écrire
$f(x)=\ln(1-x^3)-\ln(1-x^2)$
Soit $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\ln(1-x^3)=-\sum_{k\ /\ 1\leq 3k\leq N}\frac{x^{3k}}{3k}+o(x^N)$$

$$\ln(1-x^2)=-\sum_{k\ /\ 1\leq 2k\leq N}\frac{x^{2k}}{2k}+o(x^N)$$

$$\text{Donc } f(x)=\sum_{k\ /\ 1\leq 2k\leq N}\frac{x^{2k}}{2k}-\sum_{k\ /\ 1\leq 3k\leq N}\frac{x^{3k}}{3k}+o(x^N).$$

On peut déjà affirmer qu'aucun nombre dérivé d'ordre pair n'est nul.
En effet, si $n=2p$, il y a deux situations :
$*$ n n'est pas multiple de 3, donc n'est pas de la forme $3k$; le terme en x^n du développement est $\dfrac{x^{2p}}{2p}$, soit $\dfrac{x^n}{n}$; il se trouve uniquement dans la première somme ; cela donne $\dfrac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!}=\dfrac{1}{2p}$, donc $f^{(2p)}(0)=\dfrac{(2p)!}{2p}\neq 0$

$*$ n est un multiple de 3, donc n est un multiple de 6 ; n s'écrit $6p$

Le terme en x^{6p} est $\dfrac{x^{2(3p)}}{3p}-\dfrac{x^{3(2p)}}{2p}=-\dfrac{x^{6p}}{6p}$, cela donne $f^{6p}(0)=-\dfrac{(6p)!}{6p}\neq 0$.

Si n est impair.
Si c'est un multiple de 3, on trouve x^n dans la seconde somme mais pas dans la première, donc $f^{(n)}(0)$ n'est pas nul.
S'il s'écrit $n=3k+1$ ou $n=3k+2$, on ne trouve de termes en x^{3k+1} et x^{3k+2} dans aucune des deux sommes, donc son coefficient dans le développement limité est nul et pas conséquent $f^{(n)}(0)$ est nul aussi.

$$f^{(n)}(0)\ \textbf{est nul si et seulement si}\ n=3k+1\ \textbf{ou}\ n=3k+2$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021