# SERIES REELLES 1. HEC ESCP

## ENONCE DE L'EXERCICE

### ENONCE–1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{x^n a^{\cos \pi n}}{n}$ $(n \geq 1)$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

## Indications - Séries réelles.1

Dans le cas $x = -1$, faire intervenir la série harmonique alternée.
On trouve :
convergence quand $|x| < 1$.
convergence quand $x = -1,\ a = 1$
divergence quand $|x| > 1$.
divergence quand $x = 1$ et quand $x = -1$ et $a \neq 1$.


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

## Eléments de correction : séries réelles.1

Comme $\cos n\pi = \pm 1$, alors $a^{\cos n\pi} = a$ ou $\frac{1}{a}$

Si l'on pose $B = \min(a, \frac{1}{a})$ et $A = \max(a, \frac{1}{a})$, on a l'encadrement $0 < B \leq a^{\cos n\pi} \leq A$.

- Si $|x| < 1$, on a $|u_n| = |x|^n \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \leq A\frac{|x|^n}{n} \leq A|x|^n$

La série de terme général $A|x|^n$ est convergente (série géométrique de raison $|x| < 1$). Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

**Pour $|x| < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente**

- Si $|x| > 1$, on a $|u_n| = |x|^n \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \geq B\frac{|x|^n}{n}$.

$\frac{|x|^n}{n} = \frac{\exp(n\ln|x|)}{\exp(\ln n)} = \exp(n\ln|x| - \ln n)$. Par croissances comparées,

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n\ln|x| - \ln n) = +\infty$ puisque $\ln|x| > 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{n} = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} B\frac{|x|^n}{n} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = +\infty$

**Pour $|x| > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ ; la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.**

- Pour $x = 1$, $u_n = \frac{a^{\cos n\pi}}{n} \geq \frac{B}{n} > 0$.

La série de terme général $\frac{B}{n}$ est un multiple non nul de la série harmonique, donc elle diverge. Par comparaison des séries à termes positifs, on conclut :

**Pour $x = 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.**

- Pour $x = -1$ ; $u_n = \frac{(-1)^n a^{\cos n\pi}}{n}$.

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $H'_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k a^{\cos k\pi}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k}a^{\cos 2k\pi}}{2k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k-1}a^{\cos(2k-1)\pi}}{2k-1} \\
&\quad \text{on a séparé les indices pairs et les indices impairs} \\
&= a\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} \\
&= a\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k}}{2k} - \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k}}{2k} \\
&\qquad + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} \\
&= \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}
\end{aligned}
$$


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\text{Finalement } S_{2n} = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})H_n - \frac{1}{a}H'_{2n} \text{ , car } (-1)^k = -(-1)^{k-1} \text{ ;}$$

$$S_{2n} = \frac{a^2-1}{2a}H_n - \frac{1}{a}H'_{2n}$$

La série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, qui s'appelle série harmonique alternée, converge ; c'est un résultat classique que nous établirons en fin d'exposé pour les étudiants qui ne le connaissent pas. Donc la suite $(H'_n)$ est convergente.

La série de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente d'après le critère de Riemann (c'est la série harmonique). La suite $(H_n)$ est divergente et tout multiple **non nul** de $H_n$ est une suite divergente.

Ce qui amène au résultat suivant :

Si $a \neq 1$, alors $\frac{a^2-1}{2a} \neq 0$ ; la suite $(\frac{a^2-1}{2a}H_n)$ diverge ; comme la suite $(\frac{1}{a}H'_{2n})$, converge, on conclut que la suite $(\frac{a^2-1}{2a}H_n - \frac{1}{a}H'_{2n})$ diverge.

* $a \neq 1 \Longrightarrow (S_{2n})$ diverge, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Si $a = 1$, alors $S_{2n} = -H'_{2n}$. D'ailleurs, dans ce cas $u_n = \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ; donc la série $\sum u_n$ converge.

**Pour $x = -1$, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 1$**

**En résumé, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $x \in ]-1, 1[$ ou $x = -1$ et $a = 1$.**

**NB Convergence de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$**

L'idée : montrer que les sommes partielles d'indices pairs et impairs sont adjacentes et conclure que la suite $(H'_n)$ converge.

$H'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

$H'_{2n+2} - H'_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0.$

$(H'_{2n})$ est croissante

$H'_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

$H'_{2n+1} - H'_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0.$

$(H'_{2n+1})$ est décroissante

$H'_{2n+1} - H'_{2n} = \frac{1}{2n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$

Les 2 suites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite réelle $\ell$. On conclut que la suite $(H'_n)$ converge aussi vers $\ell$ donc que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Pour information $\ell = \ln 2$.


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021