SERIES REELLES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

On considère la suite (u_n) définie par

$$0 < u_0 < 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et appartient à $]0,1[$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - séries réelles.2

1) On pourra faire une récurrence et utiliser l'expression conjuguée.

2) Majorer u_n par une série géométrique convergente.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : séries réelles.2

1) Montrons par récurrence que u_n existe et appartient à $]0,1[$.
Cette proposition est satisfaite pour $n=0$ par hypothèse.
Supposons qu'elle soit satisaite pour un entier n donné.
Alors $\sqrt{1+u_n}$ et $\sqrt{1+u_n^2}$ existent donc u_{n+1} existe.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n}-\sqrt{1+u_n^2} \\ &= \frac{1+u_n-(1+u_n^2)}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}} \\ &= \frac{u_n(1-u_n)}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}} \end{aligned}$$

$u_n \in]0,1[\Longrightarrow u_n(1-u_n) \in]0,1[$; d'autre part, $2 < \sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2} < 2\sqrt{2}$ car $1<1+u_n<2$, donc $1<\sqrt{1+u_n}<\sqrt{2}$ et de même $1<\sqrt{1+u_n^2}<\sqrt{2}$.
Il en résulte que : $0<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}<\dfrac{1}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}}<\dfrac{1}{2}$.

Multiplions cet encadrement avec $0<u_n(1-u_n)<1$, on obtient $0<u_{n+1}<\frac{1}{2}<1$.

La proposition est héréditaire et par conséquent valable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in]0,1[$$

2) On vient d'obtenir $u_{n+1}=\dfrac{u_n(1-u_n)}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}}$; divisons par $u_n\neq 0$, il vient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1-u_n}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}}$$

$0<\dfrac{1}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}}<\frac{1}{2}$ et $0<(1-u_n)<1$ implique (en faisant le produit) :
$0<\dfrac{1-u_n}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+u_n^2}}<\frac{1}{2}$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{2}$$

- Appliquons le ln à cette inégalité ; $\ln u_{n+1}-\ln u_n<\ln(\frac{1}{2})$ puisque la fonction ln est strictement croissante. $\forall k\in\mathbb{N},\ \ln u_{k+1}-\ln u_k<\ln(\frac{1}{2})$

Sommons ces inégalités pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ lorsque $n\geq 1$. Il vient
$\sum_{k=0}^{n-1}(\ln u_{k+1}-\ln u_k) < \sum_{k=0}^{n-1}\ln(\frac{1}{2})$. Après simplification dans le terme de gauche ("télescopage"), on aboutit à : $\ln u_n-\ln u_0<n\ln(\frac{1}{2})=\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n$;

$$\ln u_n<\ln u_0+\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n=\ln u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Prenons l'exponentielle des deux membres, on a, par stricte croissance :

$$0<u_n<u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La série de terme général $u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente car sa raison appartient à $]-1,1[$.

Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021