



SERIES REELLES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-2

On considère la suite (u_n) définie par

$$0 < u_0 < 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et appartient à $]0, 1[$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n

Indications - séries réelles.2

- 1) On pourra faire une récurrence et utiliser l'expression conjuguée.
- 2) Majorer u_n par une série géométrique convergente.

Eléments de correction : séries réelles.2

1) Montrons par récurrence que u_n existe et appartient à $]0, 1[$.

Cette proposition est satisfaite pour $n = 0$ par hypothèse.

Supposons qu'elle soit satisfaite pour un entier n donné.

Alors $\sqrt{1+u_n}$ et $\sqrt{1+u_n^2}$ existent donc u_{n+1} existe.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2} \\ &= \frac{1+u_n - (1+u_n^2)}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}} \\ &= \frac{u_n(1-u_n)}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}} \end{aligned}$$

$u_n \in]0, 1[\Rightarrow u_n(1-u_n) \in]0, 1[$; d'autre part, $2 < \sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2} < 2\sqrt{2}$ car $1 < 1+u_n < 2$, donc $1 < \sqrt{1+u_n} < \sqrt{2}$ et de même $1 < \sqrt{1+u_n^2} < \sqrt{2}$.

Il en résulte que : $0 < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}} < \frac{1}{2}$.

Multiplions cet encadrement avec $0 < u_n(1-u_n) < 1$, on obtient $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} < 1$.

La proposition est héréditaire et par conséquent valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$$

2) On vient d'obtenir $u_{n+1} = \frac{u_n(1-u_n)}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}}$; divisons par $u_n \neq 0$, il vient :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1-u_n}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}}$$

$0 < \frac{1}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}} < \frac{1}{2}$ et $0 < (1-u_n) < 1$ implique (en faisant le produit) :

$$0 < \frac{1-u_n}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_n^2}} < \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$$

• Appliquons le $\ln$ à cette inégalité ; $\ln u_{n+1} - \ln u_n < \ln(\frac{1}{2})$ puisque la fonction $\ln$ est strictement croissante.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ln u_{k+1} - \ln u_k < \ln(\frac{1}{2})$$

Sommons ces inégalités pour $k \in [0, n-1]$ lorsque $n \geq 1$. Il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln u_{k+1} - \ln u_k) < \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\frac{1}{2}). \text{ Après simplification dans le terme de gauche}$$

("télescopage"), on aboutit à : $\ln u_n - \ln u_0 < n \ln(\frac{1}{2}) = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

$$\ln u_n < \ln u_0 + \ln \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Prenons l'exponentielle des deux membres, on a, par stricte croissance :

$$0 < u_n < u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La série de terme général $u_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente car sa raison appartient à $] -1, 1[$.

Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente