VARIABLES DISCRETES 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires définies sur Ω, discrètes, indépendantes, de même loi dont l'ensemble des valeurs est $[\![1, 6]\!]$. La moyenne de X_1 et X_2 peut-elle suivre une loi uniforme ?

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : var discrètes.2

Notons S la somme des numéros obtenus et M leur moyenne.

$S(\Omega) = \{k \in \mathbb{N}^* \ / \ 2 \leq k \leq 12\}$ et $M(\Omega) = \{\frac{k}{11} \in \mathbb{N}^* \ / \ 2 \leq k \leq 12\}$ car card $S(\Omega) = 11$.

M suit la loi uniforme sur $M(\Omega)$ revient à dire que S suit la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$, car $(M = \frac{k}{11}) = (S = k)$.

• $P(S = 2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$ par indépendance des variables X_1 et X_2, puis $P(S = 2) = (P(X_1 = 1))^2$ puisque X_1 et X_2 suivent la même loi. Or $P(S = 2) = \frac{1}{11}$, donc on obtient

$(P(X_1 = 1))^2 = \frac{1}{11}$, ce qui donne $P(X_1 = 1) = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

Par raison de symétrie, $(S = 12) = (X_1 = 6 \cap X_2 = 6)$, on déduit $P(X_1 = 6) = \frac{1}{\sqrt{11}}$.

• $P(S = 3) = P((X_1 = 1 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 1))$. Les deux événements sont incompatibles, puis les variables sont indépendantes et suivent la même loi,

$P(S = 3) = 2P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) = 2P(X_1 = 1)P(X_1 = 2)$;

ce qui donne $\frac{1}{11} = 2P(X_1 = 1)P(X_1 = 2)$, donc $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2\sqrt{11}}$.

Par raison de symétrie, $P(S = 11) = 2P(X_1 = 5)P(X_1 = 6)$, d'où $P(X_1 = 5) = \frac{1}{2\sqrt{11}}$.

• $(S = 4) = (X_1 = 1 \cap X_2 = 3) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 2) \cup (X_1 = 3 \cap X_2 = 1)$. Pour des raisons déjà données, on obtient

$\frac{1}{11} = 2P(X_1 = 1)P(X_1 = 3) + (P(X_1 = 2))^2$; et par conséquent,

$\frac{1}{11} = 2\frac{1}{\sqrt{11}}P(X_1 = 3) + \frac{1}{4 \times 11}$: $P(X_1 = 3) = \frac{3}{8\sqrt{11}}$.

Et par symétrie, $P(X_1 = 4) = \frac{3}{8\sqrt{11}}$.

$\sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k) = \frac{1}{\sqrt{11}}\left(2 + 1 + \frac{3}{4}\right) \neq 1.$

La moyenne de X_1 et X_2 ne peut pas suivre une loi uniforme

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021