

**VARIABLES DISCRETES 3. HEC ESCP****ENONCE DE L'EXERCICE****ENONCE-3**

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé

Soient  $X_1, X_2$  deux variables réelles, indépendantes, définies sur  $\Omega$ , suivant chacune la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Soit  $Y$  une variable indépendante de  $X_1$  et de  $X_2$  telle que

$$P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose  $Z_1 = X_1 Y$  et  $Z_2 = X_2 Y$ .

- 1) Montrer que  $Z_1$  et  $Z_2$  ne sont pas indépendantes.
- 2) Montrer que  $Z_1^2$  et  $Z_2^2$  sont indépendantes.

### Indications - var discrètes 3.

- Calculer  $\text{cov}(Z_1, Z_2)$ .

### Eléments de correction : var discrètes 3.

1) On remarque que  $Y^2$  est la variable certaine égale à 1.

$$\begin{aligned}\text{cov}(Z_1, Z_2) &= E(Y^2 X_1 X_2) - E(Y X_1)E(Y X_2) \\ &= E(X_1 X_2) - E(Y)E(X_1)E(Y)E(X_2) \quad \text{par indépendance de } Y, X_1 \text{ et } Y, X_2 \\ &= E(X_1)E(X_2) \quad \text{car } E(Y) = 0\end{aligned}$$

$$\text{cov}(Z_1, Z_2) = \lambda^2$$

$\text{cov}(Z_1, Z_2) \neq 0 \implies Z_1$  et  $Z_2$  non indépendantes

2)  $Z_1^2 = X_1^2$  et  $Z_2^2 = X_2^2$  car  $Y^2$  est la variable certaine égale à 1.

Puisque  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, on sait que  $X_1^2$  et  $X_2^2$  le sont aussi, car si deux variables sont indépendantes, toute fonction de l'une est indépendante de toute fonction de l'autre.

$Z_1^2$  et  $Z_2^2$  sont indépendantes.