VARIABLES DISCRETES 3. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé

Soient X_1, X_2 deux variables réelles, indépendantes, définies sur Ω, suivant chacune la loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une variable indépendante de X_1 et de X_2 telle que

$$P(Y=1)=P(Y=-1)=\frac{1}{2}.$$

On pose $Z_1 = X_1 Y$ et $Z_2 = X_2 Y$.

1) Montrer que Z_1 et Z_2 ne sont pas indépendantes.

2) Montrer que Z_1^2 et Z_2^2 sont indépendantes.

Indications - var discrètes 3.

- Calculer $\mathrm{cov}(Z_1, Z_2)$.

Eléments de correction : var discrètes 3.

1) On remarque que Y^2 est la variable certaine égale à 1.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Z_1,Z_2) &= E(Y^2X_1X_2)-E(YX_1)E(YX_2)\\ &= E(X_1X_2)-E(Y)E(X_1)E(Y)E(X_2) \quad \text{par indépendance de } Y,\ X_1 \text{ et } Y,\ X_2\\ &= E(X_1)E(X_2) \quad \text{car } E(Y)=0\end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}(Z_1,Z_2)=\lambda^2$$

$$\operatorname{cov}(Z_1,Z_2)\neq 0 \Longrightarrow Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ non indépendantes}$$

2) $Z_1^2=X_1^2$ et $Z_2^2=X_2^2$ car Y^2 est la variable certaine égale à 1.

Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, on sait que X_1^2 et X_2^2 le sont aussi, car si deux variables sont indépendantes, toute fonction de l'une est indépendante de toute fonction de l'autre.

$$Z_1^2 \text{ et } Z_2^2 \text{ sont indépendantes.}$$