MATRICES 2. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier k naturel non nul tel que $A^k = (0)$ où (0) est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice $B = I_n + A + \cdots + A^{k-1}$ est inversible et déterminer son inverse.

2) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $P + P' + \cdots + P^{(5)} = X^5$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- On a : $(I-A)(I+A+\cdots+A^{k-1}) = I-A^k = I$ puisque $A^k = (0)$, c'est-à-dire $(I-A)B = I$.

Donc B est inversible et $B^{-1} = I - A$.

- Soit D l'endomorphisme de dérivation de $E = \mathbb{R}_5[X]$: $\forall Q \in \mathbb{R}_5[X],\ D(Q) = Q'$.

Comme deg $(Q) \leq 5$, on en déduit que $D^6 = 0$.

Donc l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E + D + \cdots + D^5$ est inversible et son inverse est $\mathrm{Id}_E - D$.

L'égalité $P + P' + \cdots + P^{(5)} = X^5$ équivaut à $(\mathrm{Id}_E + D + \cdots + D^5)P = X^5$ qui équivaut à $(\mathrm{Id} - D)X^5 = P$.

L'équation $P + P' + \cdots + P^{(5)} = X^5$ a une unique solution $P = X^5 - 5X^4$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021