



MATRICES 2. HEC.ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-2

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier k naturel non nul tel que $A^k = (0)$ où (0) est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice $B = I_n + A + \dots + A^{k-1}$ est inversible et déterminer son inverse.

2) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $P + P' + \dots + P^{(5)} = X^5$.

Éléments de correction : matrices.2

- On a : $(I-A)(I+A+\dots+A^{k-1}) = I-A^k = I$ puisque $A^k = (0)$, c'est-à-dire $(I-A)B = I$.

Donc B est inversible et $B^{-1} = I - A$.

- Soit D l'endomorphisme de dérivation de $E = \mathbb{R}_5[X] : \forall Q \in \mathbb{R}_5[X], D(Q) = Q'$.

Comme $\deg(Q) \leq 5$, on en déduit que $D^6 = 0$.

Donc l'endomorphisme $\text{Id}_E + D + \dots + D^5$ est inversible et son inverse est $\text{Id}_E - D$.

L'égalité $P + P' + \dots + P^{(5)} = X^5$ équivaut à $(\text{Id}_E + D + \dots + D^5)P = X^5$ qui équivaut à $(\text{Id} - D)X^5 = P$.

L'équation $P + P' + \dots + P^{(5)} = X^5$ a une unique solution $P = X^5 - 5X^4$.