VARIABLES A DENSITE 1. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. On considère $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X).

Déterminer la loi de Y et son espérance.

Var à densité.1

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y=n) = e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})$ et $E(Y) = \dfrac{1}{e^{\lambda}-1}\cdot$

Eléments de correction : Var à densité.1

On a $Y(\Omega)=\mathbb{N}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ (Y=n)\Longleftrightarrow \lfloor X\rfloor=n\Longleftrightarrow n\leq X<n+1$. Donc

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= P(n\leq X<n+1)\\
&= P(n\leq X\leq n+1) \quad \text{car } X \text{ est une variable à densité}\\
&= \int_n^{n+1}\lambda e^{-\lambda t}dt\\
&= \Big[-e^{-\lambda t}\Big]_n^{n+1}\\
&= e^{-\lambda n}-e^{-\lambda(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ P(Y=n)=e^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})$$

$E(Y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}ne^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})$ sous réserve de convergence de la série (la convergence absolue est superflue puisque la série est à termes positifs).

Or $ne^{-\lambda n}(1-e^{-\lambda})=(1-e^{-\lambda})e^{-\lambda}\times ne^{-\lambda(n-1)}=(1-e^{-\lambda})e^{-\lambda}\times n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$

$n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ est le terme général de la dérivée de la série géométrique $\sum\Big(e^{-\lambda}\Big)^n$. Cette série converge puisque sa raison $e^{-\lambda}$ appartient à $]-1,1[$.

La série de terme général $n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ converge et par conséquent la série

$\sum(1-e^{-\lambda})e^{-\lambda}\times n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}$ également.

La variable Y admet une espérance

$$\begin{aligned}
E(Y) &= (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}n\Big(e^{-\lambda}\Big)^{n-1}\\
&= (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda}\times\frac{1}{(1-e^{-\lambda})^2}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}
\end{aligned}$$

Et en multipliant haut et bas par e^{λ}, on trouve $E(Y)=\dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$