



VARIABLES A DENSITE 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-2

Soit X une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre α . On note f une densité de X .

- 1) Justifier et calculer, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq zx)f(x)dx$.
- 2) Vérifier que G est une fonction de répartition d'une variable à densité.

Indications - var à densité.2

1) On trouve $G(z) = 0$ si $z \leq 0$ et $G(z) = \frac{z}{z+1}$ si $z \geq 0$.

Eléments de correction : var à densité.2

Une densité de la loi exponentielle de paramètre α est f définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } f(x) = \alpha \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0.$$

Rappelons que la fonction de répartition de X est F définie par :

$$F(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } F(x) = 1 - \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0.$$

• La fonction $x \mapsto xz$ est continue sur \mathbb{R} ; la fonction F est continue sur \mathbb{R} car c'est la fonction de répartition d'une variable à densité, donc par composition, la fonction $x \mapsto F(xz) = P(X \leq xz)$ est continue sur \mathbb{R} .

On remarque que $P(X \leq xz)f(x) = 0$ pour $x < 0$ (à cause de f) donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx = \int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx \text{ sous réserve de convergence, bien-sûr.}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx$ est impropre uniquement en $+\infty$ puisque la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, donc la fonction $x \mapsto P(X \leq xz)f(x)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

On a $0 \leq P(X \leq xz)f(x) \leq f(x)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge (et vaut 1 d'ailleurs).

On applique alors le théorème de comparaison des fonctions continues positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on conclut que

l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx$ converge.

- Si $z \leq 0$ et $x \geq 0$, alors $xz \leq 0$ et $P(X \leq xz) = 0$.
- Si $z \geq 0$ et $x \geq 0$, alors $P(X \leq xz) = 1 - \exp(-\alpha xz)$

$$G(z) = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-\alpha xz)) \alpha \exp(-\alpha x) dx.$$

Soit $t \geq 0$, considérons $I(t) = \int_0^t (1 - \exp(-\alpha xz)) \alpha \exp(-\alpha x) dx = \int_0^t (1 - (\exp(-\alpha x))^z) \alpha \exp(-\alpha x) dx$.

Dans cette intégrale, faisons le changement de variable suivant :

$u(x) = \exp(-\alpha x)$; $du = -\alpha \exp(-\alpha x) dx$; u est de classe C^1 sur \mathbb{R} , le changement de variable est justifié.

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_1^{\exp(-\alpha t)} (-(1 - u^z)) du \\ &= - \left[u - \frac{u^{z+1}}{z+1} \right]_1^{\exp(-\alpha t)} \\ &= - \exp(-\alpha t) + \frac{(\exp(-\alpha t))^{z+1}}{z+1} + 1 - \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-\alpha t) = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\exp(-\alpha t))^{z+1}}{z+1} = 0$ car $z+1 > 0$.

$$G(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 1 - \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+1}$$

$$\text{En résumé : } G(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{z}{z+1} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

• La fonction G est continue sur \mathbb{R}^* de manière évidente ; elle est continue en 0 car $\lim_{z \rightarrow 0^+} G(z) = \lim_{z \rightarrow 0^-} G(z) = 0 = G(0)$

La fonction G est dérivable sur \mathbb{R}^* de manière tout aussi évidente :

$$\forall z < 0, G'(z) = 0 \text{ et } \forall z > 0, G'(z) = \frac{1}{(z+1)^2} > 0$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
G	0	\rightarrow	0	\nearrow	1

En résumé, G est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 sur \mathbb{R}^* , croissante, $\lim_{z \rightarrow -\infty} G(z) = 0$ et $\lim_{z \rightarrow +\infty} G(z) = 1$

G est la fonction de répartition d'une variable à densité