VARIABLES A DENSITE 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit X une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre α. On note f une densité de X.

1) Justifier et calculer, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $G(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq zx) f(x) dx$.

2) Vérifier que G est une fonction de répartition d'une variable à densité.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - var à densite.2

1) On trouve $G(z) = 0$ si $z \leq 0$ et $G(z) = \frac{z}{z+1}$ si $z \geq 0$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : var à densite.2

Une densité de la loi exponentielle de paramètre α est f définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } f(x) = \alpha \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0.$$

Rappelons que la fonction de répartition de X est F définie par :

$$F(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } F(x) = 1 - \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0.$$

- La fonction $x \longmapsto xz$ est continue sur $\mathbb{R}$; la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable à densité, donc par composition, la fonction $x \longmapsto F(zx) = P(X \leq xz)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On remarque que $P(X \leq xz)f(x) = 0$ pour $x < 0$ (à cause de f) donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx$ sous réserve de convergence, bien-sûr.

L'intégrale $\int_{0}^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx$ est impropre uniquement en $+\infty$ puisque la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto P(X \leq xz)f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a $0 \leq P(X \leq xz)f(x) \leq f(x)$ et l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ converge (et vaut 1 d'ailleurs).

On applique alors le théorème de comparaison des fonctions continues positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on conclut que

$$\textbf{l'intégrale } \int_{0}^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx \textbf{ converge.}$$

- Si $z \leq 0$ et $x \geq 0$, alors $xz \leq 0$ et $P(X \leq xz) = 0$.
- Si $z \geq 0$ et $x \geq 0$, alors $P(X \leq zx) = 1 - \exp(-\alpha zx)$

$$G(z) = \int_{0}^{+\infty} \Big(1 - \exp(-\alpha zx)\Big)\alpha \exp(-\alpha x)dx.$$

Soit $t \geq 0$, considérons $I(t) = \int_{0}^{t} \Big(1-\exp(-\alpha zx)\Big)\alpha \exp(-\alpha x))dx = \int_{0}^{t} \Big(1-(\exp(-\alpha x))^z\Big)\alpha \exp(-\alpha x)dx.$

Dans cette intégrale, faisons le changement de variable suivant :

$u(x) = \exp(-\alpha x)$; $du = -\alpha \exp(-\alpha x)dx$; u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, le changement de variable est justifié.

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{1}^{\exp(-\alpha t)} (-(1-u^z))du \\ &= -\Big[u - \frac{u^{z+1}}{z+1}\Big]_1^{\exp(-\alpha t)} \\ &= -\exp(-\alpha t) + \frac{(\exp(-\alpha t))^{z+1}}{z+1} + 1 - \frac{1}{z+1} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \exp(-\alpha t) = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{(\exp(-\alpha t))^{z+1}}{z+1} = 0$ car $z + 1 > 0$.

$G(z) = \lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = 1 - \dfrac{1}{z+1} = \dfrac{z}{z+1}$

$$\text{En résumé : } G(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \dfrac{z}{z+1} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

- La fonction G est continue sur $\mathbb{R}^*$ de manière évidente ; elle est continue en 0 car $\lim\limits_{z\to0^+} G(z) = \lim\limits_{z\to0^-} G(z) = 0 = G(0)$

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de manière tout aussi évidente :

$\forall z < 0,\ G'(z) = 0$ et $\forall z > 0,\ G'(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} > 0$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
G	0	$\rightarrow$	0	$\nearrow$	1

En résumé, G est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, croissante, $\lim\limits_{z\to-\infty} G(z) = 0$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} G(z) = 1$

G est la fonction de répartition d'une variable à densité

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021