VARIABLES A DENSITE 2. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–2

Soit X une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre α. On note f une densité de X.

1) Justifier et calculer, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq zx) f(x) dx$.

2) Vérifier que G est une fonction de répartition d'une variable à densité.

Indications - var à densite.2

1) On trouve $G(z) = 0$ si $z \leq 0$ et $G(z) = \frac{z}{z+1}$ si $z \geq 0$.

Eléments de correction : var à densite.2

Une densité de la loi exponentielle de paramètre α est f définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } f(x) = \alpha \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0.$$

Rappelons que la fonction de répartition de X est F définie par :

$$F(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } F(x) = 1 - \exp(-\alpha x) \text{ si } x \geq 0.$$

- La fonction $x \longmapsto xz$ est continue sur $\mathbb{R}$; la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable à densité, donc par composition, la fonction $x \longmapsto F(zx) = P(X \leq xz)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On remarque que $P(X \leq xz)f(x) = 0$ pour $x < 0$ (à cause de f) donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx = \int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx$ sous réserve de convergence, bien-sûr.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx$ est impropre uniquement en $+\infty$ puisque la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, donc la fonction $x \longmapsto P(X \leq xz)f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a $0 \leq P(X \leq xz)f(x) \leq f(x)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge (et vaut 1 d'ailleurs).

On applique alors le théorème de comparaison des fonctions continues positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on conclut que

$$\textbf{l'intégrale } \int_0^{+\infty} P(X \leq xz)f(x)dx \textbf{ converge.}$$

- Si $z \leq 0$ et $x \geq 0$, alors $xz \leq 0$ et $P(X \leq xz) = 0$.
- Si $z \geq 0$ et $x \geq 0$, alors $P(X \leq zx) = 1 - \exp(-\alpha zx)$

$G(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(1 - \exp(-\alpha zx)\Big)\alpha \exp(-\alpha x)dx.$

Soit $t \geq 0$, considérons $I(t) = \displaystyle\int_0^t \Big(1 - \exp(-\alpha zx)\Big)\alpha \exp(-\alpha x))dx = \int_0^t \Big(1 - (\exp(-\alpha x))^z\Big)\alpha \exp(-\alpha x)dx.$

Dans cette intégrale, faisons le changement de variable suivant :

$u(x) = \exp(-\alpha x)$; $du = -\alpha \exp(-\alpha x)dx$; u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, le changement de variable est justifié.

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_1^{\exp(-\alpha t)} (-(1 - u^z))du \\
&= -\Big[u - \frac{u^{z+1}}{z+1}\Big]_1^{\exp(-\alpha t)} \\
&= -\exp(-\alpha t) + \frac{(\exp(-\alpha t))^{z+1}}{z+1} + 1 - \frac{1}{z+1}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \exp(-\alpha t) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{(\exp(-\alpha t))^{z+1}}{z+1} = 0$ car $z + 1 > 0$.

$G(z) = \displaystyle\lim_{t \to +\infty} I(t) = 1 - \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+1}$

$$\text{En résumé : } G(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \dfrac{z}{z+1} & \text{si } z \geq 0 \end{cases}$$

- La fonction G est continue sur $\mathbb{R}^*$ de manière évidente ; elle est continue en 0 car $\displaystyle\lim_{z \to 0^+} G(z) = \lim_{z \to 0^-} G(z) = 0 = G(0)$

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de manière tout aussi évidente :

$\forall z < 0,\ G'(z) = 0$ et $\forall z > 0,\ G'(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} > 0$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
G	0	$\rightarrow$	0	$\nearrow$	1

En résumé, G est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, croissante, $\lim\limits_{z\to-\infty} G(z) = 0$ et $\lim\limits_{z\to+\infty} G(z) = 1$

G est la fonction de répartition d'une variable à densité