SUJETS COURTS DE MATHEMATIQUES

VARIABLES A DENSITE 3. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs strictement positives, de densité f. On suppose que X et $\frac{1}{X}$ admettent une espérance.

Comparer $\frac{1}{E(X)}$ et $E(\frac{1}{X})$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications - var à densité 3.

On pensera à Cauchy-Schwarz et on trouvera que $1 \leq E(X)E(\frac{1}{X})$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Eléments de correction : var à densité 3.

- Pour les étudiants qui ne la connaissent pas, établissons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit f et g deux fonction continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$. On a

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx \qquad (1)$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $T(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(x)+g(x))^2 dx$. Remarquons tout de suite que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ T(\lambda) \geq 0$. On développe et on obtient

$T(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx.$

Si f est la fonction nulle l'inégalité (1) est satisfaite : ($0 \leq 0$)

Si f n'est pas la fonction nulle, alors $\int_a^b f^2(x)dx > 0$. Exprimons le fait que le trinôme $T(\lambda)$ garde un signe constant ; cela veut dire qu'il n'admet pas 2 racines réelles distinctes, donc son discriminant Δ est négatif ou nul.

$\Delta = 4\Big(\Big(\int_a^b f(x)g()xdx\Big)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx\Big)$

$\Delta \leq 0 \Longleftrightarrow \Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx$, ce qui est l'inégalité cherchée.

- $E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx$. D'après le théorème du transfert, $E(\frac{1}{X}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)dx$.

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $x \longmapsto \sqrt{\frac{f(x)}{x}}$ et $x \longmapsto \sqrt{xf(x)}$. On vérifie sans peine que ces deux fonctions sont continues sur $[a,b]$; on obtient

$\Big(\int_a^b f(x)dx\Big)^2 \leq \int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \times \int_a^b xf(x)dx.$

Faisons tendre a vers 0 et b vers $+\infty$. Comme les 3 intégrales de 0 à $+\infty$ convergent, il vient

$\Big(\int_0^{+\infty} f(x)dx\Big)^2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx \times \int_0^{+\infty} xf(x)dx$ ou encore $1 \leq E(\frac{1}{X}) \times E(X)$.

Comme X est à valeurs strictement positives, les deux espérances sont strictement positives.

Le résultat cherché est $\frac{1}{E(X)} \leq E(\frac{1}{X})$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021