VARIABLES A DENSITE 3. HEC ESCP

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–3

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs strictement positives, de densité f. On suppose que X et $\frac{1}{X}$ admettent une espérance.

Comparer $\frac{1}{E(X)}$ et $E(\frac{1}{X})$.

Indications - var à densité 3.

On pensera à Cauchy-Schwarz et on trouvera que $1 \leq E(X)E(\frac{1}{X})$.

Eléments de correction : var à densité 3.

• Pour les étudiants qui ne la connaissent pas, établissons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
Soit f et g deux fonction continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. On a

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx \qquad (1)$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $T(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx$. Remarquons tout de suite que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ T(\lambda) \geq 0$. On développe et on obtient

$T(\lambda) = \lambda^2 \displaystyle\int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx.$

Si f est la fonction nulle l'inégalité (1) est satisfaite : ($0 \leq 0$)

Si f n'est pas la fonction nulle, alors $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx > 0$. Exprimons le fait que le trinôme $T(\lambda)$ garde un signe constant ; cela veut dire qu'il n'admet pas 2 racines réelles distinctes, donc son discriminant Δ est négatif ou nul.

$\Delta = 4\Big(\Big(\displaystyle\int_a^b f(x)g()xdx\Big)^2 - \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx\Big)$

$\Delta \leq 0 \Longleftrightarrow \Big(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx\Big)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx$, ce qui est l'inégalité cherchée.

• $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$. D'après le théorème du transfert, $E(\frac{1}{X}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)dx$.

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{f(x)}{x}}$ et $x \longmapsto \sqrt{xf(x)}$. On vérifie sans peine que ces deux fonctions sont continues sur $[a, b]$; on obtient

$\Big(\displaystyle\int_a^b f(x)dx\Big)^2 \leq \int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \times \int_a^b xf(x)dx.$

Faisons tendre a vers 0 et b vers $+\infty$. Comme les 3 intégrales de 0 à $+\infty$ convergent, il vient

$\Big(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx\Big)^2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx \times \int_0^{+\infty} xf(x)dx$ ou encore $1 \leq E(\frac{1}{X}) \times E(X)$.

Comme X est à valeurs strictement positives, les deux espérances sont strictement positives.

Le résultat cherché est $\dfrac{1}{E(X)} \leq E(\dfrac{1}{X})$